УДК 62-503.56(045)

М. М. Малоєд, асп.

ОПТИМІЗАЦІЯ СТАБІЛІЗУВАЛЬНОГО КЕРУВАННЯ МАТЕМАТИЧНИМ МАЯТНИКОМ

Інститут аерокосмічних систем управління НАУ, e-mail: marina.maloed@yandex.ua

Розглянуто процедуру оптимізації стабілізувального керування математичним маятником. Проведено математичне моделювання руху маятника без керування та з оптимальним стабілізувальним керуванням в середовищі Matlab.

Ключові слова: математичний маятник, оптимальне керування, стабілізувальне керування, математичне моделювання, методи жорсткого синтезу.

Вступ. Проблема оптимізації керування системами чи об'єктами виникає у разі обмежених енергетичних ресурсів, коли реалізація керування певною потужністю для стабілізації системи виявляється неможливою, оскільки ймовірні або залишкові похибки стабілізації, або перехід об'єкта не в задану точку, а в її окіл.

Проблема забезпечення найкоротшого шляху чи найменшого часу руху системи принципово не відрізняється від проблеми обмеження енергетики об'єкта: оптимізація для кількісної характеристики ступеня досягнення чи встановлення компромісу між енергетичними витратами та величинами залишкових похибок у системі неможлива без критерію якості, найчастіше інтегрального квадратичного, мінімум якого і має забезпечувати оптимальне керування для заданого критерію.

Методи жорсткого синтезу нелінійних систем стабілізації, зокрема математичного маятника, запропонував С. М. Онищенко на початку 90-х років минулого сторіччя, але й дотепер оптимізація синтезованого ним керування математичним маятником не реалізована. Тому дослідження цього питання залишається досить актуальним.

Постановка завдання. Розробити процедуру оптимізації стабілізувального керування математичним маятником. Побудувати математичну модель руху маятника з оптимальним стабілізувальним керуванням та без нього в середовищі Matlab.

Виклад основного матеріалу. Проблему стабілізації математичного маятника у верхньому (нестійкому) положенні рівноваги з інтегрувальним керувальним органом [1] розглянув С. М. Онищенко [2]. Скористаємось отриманими результатами для подальшої оптимізації синтезованого ним стабілізувального керування.

У рівнянні $\ddot{\varphi}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$ вільних коливань математичного маятника [3], у якому $\varphi-$ кут відхилення маятника від вертикалі в нижньому (стійкому) положенні рівноваги; $l-$ довжина маятника; $g-$ прискорення сили тяжіння, припускаємо $g=l$, $\varphi=\pi+x_1$. Потім за допомогою методики [4] запишемо рівняння

$$\ddot{x}_1-\sin x_1=\int_{t_0}^{t}u(x_1,\dot{x}_1)dt$$

коливань математичного маятника у верхньому (нестійкому) положенні рівноваги з інтегральним керуванням в псевдолінійній формі. Будемо мати

$$\dot{x}=(A-bc^T)x,\quad x(t_0)=x_0.$$

Тут
$$A(x)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ a(x) & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix},\quad b=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 1\end{bmatrix}, \tag{1}$$

$$u=-c^T x,\quad c^T=[c_1,\quad c_2,\quad c_3],$$

в формулі (1) для зручності взято $a(x)=\dfrac{\sin x_1}{x_1}$.

Стабілізувальне керування математичним маятником. Методом жорсткого синтезу нелінійних систем стабілізації отримано закон керування [2]

$$c^T=\left[\frac{1}{d_2}\left(\frac{1}{2d_2^2}-a(x)\right),\quad \frac{3}{2d_2^2}-4a(x),\quad \frac{3}{2d_2}\right], \tag{2}$$

що забезпечує стабілізацію замкненої системи

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\ \dot{x}_2\\ \dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ \dfrac{\sin x_1}{x_1} & 0 & 1\\ -\dfrac{1}{2d_2^3}+\dfrac{\sin x_1}{x_1 d_2} & -\dfrac{3}{2d_2^2}+4\dfrac{\sin x_1}{x_1} & -\dfrac{3}{2d_2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{bmatrix}, \tag{3}$$

яка описує кінцеві рухи математичного маятника біля верхнього (нестійкого) положення рівноваги в разі інтегрального керування.

Для матриць D і Q згідно з працею [5] виявляються справедливими вирази:

$$D=\begin{bmatrix}1 & 2d_2 & d_2^2\\ 2d_2 & 5d_2^2 & 3d_2^3\\ d_2^2 & 3d_2^3 & 3d_2^4\end{bmatrix}=\text{const}; \tag{4}$$

$$Q(x)=2\begin{bmatrix}d_2^{-1} & 2q_6(x) & d_2 q_6(x)\\ 2q_6(x) & d_2 q_5(x) & 3d_2^2 q_4(x)\\ d_2 q_6(x) & 3d_2^2 q_4(x) & 3d_2^3\end{bmatrix}, \tag{5}$$

де для зручності взято $q_4(x)=1-4d_2^2 a(x),\quad q_5(x)=5-24d_2^2 a(x),\quad q_6(x)=1-6d_2^2 a(x)$, за значень d_2 із діапазону $0<d_2<0{,}408$.

Оптимальне керування математичним маятником. Розв'яжемо задачу оптимальної стабілізації математичного маятника шляхом адитивного введення в заздалегідь стабілізовану систему (3) оптимального керування, яке реалізується тими ж каналами, що і стабілізувальне керування. Тоді будемо мати систему

$$\dot{x}=\{A-b[c^T+k^T]\}x,$$

для якої побудуємо оптимальне керування

$$u_{\text{опт}}=-Rb^T Dx$$

за критерієм узагальненої роботи [6]

$$I(x,u,u_{\text{опт}})=\int_{t_0}^{\infty}(x^TQ(x,t)x+u^TR_1^{-1}u+u_{\text{опт}}^TR^{-1}u_{\text{опт}})dt\to\min_{u\in U}.$$

Тут $Q(x,t)$ визначається формулою (5), $R_1=\begin{bmatrix}r_{11}&0&0\\0&r_{12}&0\\0&0&r_{13}\end{bmatrix}$ і $R=\begin{bmatrix}r_1&0&0\\0&r_2&0\\0&0&r_3\end{bmatrix}$ – додатно визначені матриці вагових коефіцієнтів.

Підставивши значення матриць A,b,c^T,D відповідно з формул (1), (2), (4), будемо мати такі рівняння застабілізованого математичного маятника з оптимальним керуванням:

$$\begin{bmatrix}\dot{x}_1\\\dot{x}_2\\\dot{x}_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&1&0\\\dfrac{\sin x_1}{x_1}&0&1\\\dfrac{\sin x_1}{d_2x_1}-\dfrac{1}{2d_2^3}-r_1d_2^2&\dfrac{4\sin x_1}{x_1}-\dfrac{3}{2d_2^2}-3r_2d_2^3&-\dfrac{3}{2d_2}-3r_3d_2^4\end{bmatrix}\times\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix},$$

причому саме керування, що забезпечує оптимальну стабілізацію математичного маятника, має вигляд

$$u_{\text{опт}}=[-r_1d_2^2\quad -3r_2d_2^3\quad -3r_3d_2^4]x$$

за значень d_2 із діапазону $0<d_2<0{,}408$.

Математичне моделювання руху маятника. Побудуємо математичну модель руху маятника методом Рунге–Кутта в середовищі Matlab за початкових умов $x(0)=[0.1,\ 0,\ 0]$, $t\in[0;60]$. Будемо мати рис. 1.

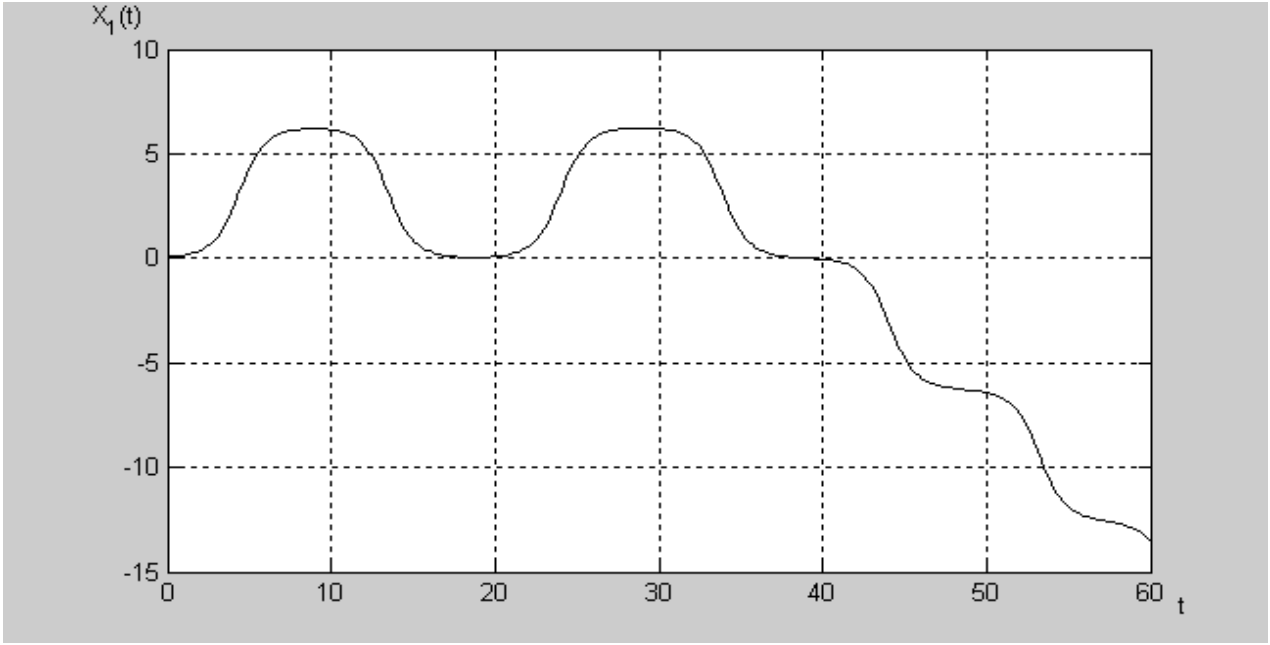


Рис. 1

Математична модель руху маятника зі стабілізувальним керуванням за початкових умов $x(0)=[0.1;\ 0;\ 0]$, $t\in[0;\ 60]$ і $d_2=0{,}3$ відповідно матиме вигляд, показаний на рис. 2.

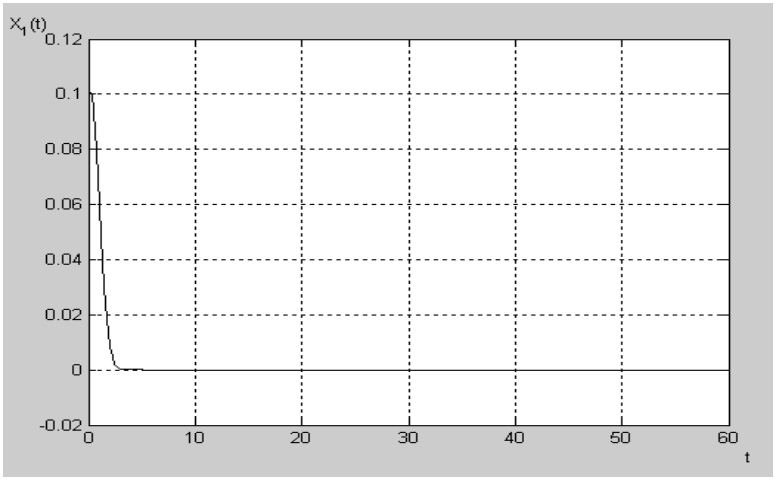


Рис. 2

Тоді математична модель руху маятника з оптимальним стабілізувальним керуванням за цих же початкових умов і $d_2 = 0,3$, $r_1 = 0,015$, $r_2 = 0,16$, $r_3 = 0,17$ виглядатиме так, як показано на рис. 3.

Для наочності наведемо спільний графік руху маятника зі стабілізувальним керуванням та з оптимальним стабілізувальним керуванням за таких самих початкових умов, але на інтервалі $t \in [0;\ 10]$ (рис. 4).

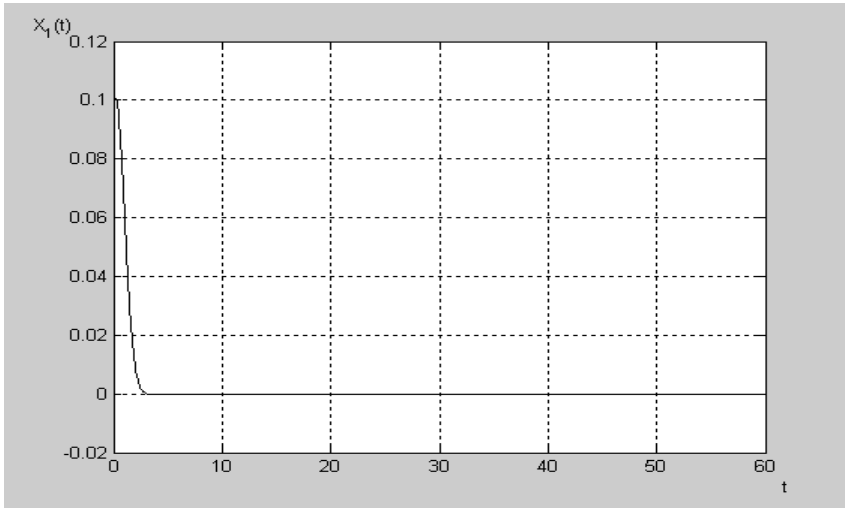


Рис. 3

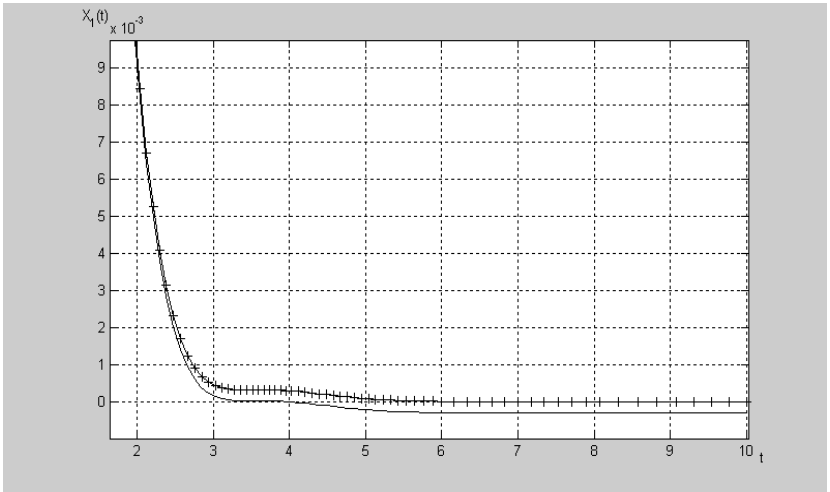


Рис. 4

Тут оптимальний стабілізований рух математичного маятника позначено суцільною лінією, а його неоптимальний стабілізований рух – знаком «+».

Висновки. Застосування запропонованого оптимального керування сприяє підвищенню точності стабілізації математичного маятника і мінімізує квадратний критерій якості О. А. Красовського. Отримане оптимальне керування за допомогою стабілізованого математичного маятника забезпечує стійкість системи вже на третій секунді (що видно з рис. 4), тоді як неоптимальне стабілізувальне керування – нульове значення відхилень у системі лише на п'ятій секунді. Оптимальне керування підвищує якість стабілізації математичного маятника в середньому на 35 %.

Список літератури

1. *Красовский Н. Н.* Дополнения к книге И. Г. Малкина «Теория устойчивости движения» / Н. Н. Красовский – М.: Наука, 1966. – С. 475 – 514.
2. *Онищенко С. М.* Анализ прямых методов жесткого синтеза систем стабилизации / С. М. Онищенко – К.: 1997. – 79 с. – (Препринт / НАН Украины Ин-т математики: 97.12).
3. *Кильчевский Н. А.* Курс теоретической механіки / Н. А. Кильчевский – М.: Наука, 1977. – Т. 2. – 544 с.
4. *Барбашин Е. А.* Функции Ляпунова / Е. А. Барбашин – М.: Наука, 1970. – 240 с.
5. *Онищенко С. М.* Применение шестого алгоритма синтеза систем стабилизации к нелинейным объектам / С. М. Онищенко, Н. П. Коваленко, М. Н. Сусол // Проблеми інформатизації та управління. – К.: НАУ, 2005. – Вип. 2(13). – С. 73 – 77.
6. *Красовский А. А.* Системы автоматического управления полетом и их аналитическое конструирование / А. А. Красовский – М.: Наука, 1973. – 560 с.

М. Н. Малоед

Оптимизация стабилизирующего управления математическим маятником

Рассмотрена процедура оптимизации стабилизирующего управления математическим маятником. Выполнено математическое моделирование движения маятника без управления и с оптимальным стабилизирующим управлением в среде Matlab.

M. M. Maloyed

Optimization of stabilization management by a mathematical pendulum

Procedure of optimization of stabilization management by a mathematical pendulum is considered. The mathematical design of motion of pendulum is executed without the management and with the optimum stabilization management in the environment of Matlab.