УДК 004.942(045)

М. Е. Сердюк, канд. техн. наук

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЦИФРОВОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ НА ОСНОВЕ ТЕОРИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

Днепропетровский национальный университет им. Олеся Гончара, e-mail: me_serdyuk@i.ua

Рассмотрена математическая модель цифрового изображения, которая основана на представлении изображения в виде линейного непрерывного функционала на классе финитных функций с прямоугольным носителем. Определены допустимые изображения при их обработке с порождающей функцией, принадлежащей классу функций ограниченной вариации.

Ключевые слова: математическая модель изображения, функция ограниченной вариации, множества Каччопполи, топографическое представление изображения, кривизна линий уровня.

Введение. Решение многих научных и технических проблем приводит к необходимости цифровой обработки графической информации. Такого рода задачи возникают в очень многих областях знаний: медицинской и технической диагностике, исследованиях Земли и космоса, инженерном проектировании, мониторинге природных ресурсов, телевидении и др. В настоящее время существует множество методов и алгоритмов обработки изображений – фильтрации, сжатия, интерполяции, хранения и поиска, анализа и принятия решений. Их эффективность во многом зависит от того, какая математическая модель используется для представления изображения. В данной работе рассматривается математическая модель цифровых растровых изображений, построенная на основе теории распределений.

Аксиоматические модели изображений и рисунков. В большинстве инженерных применений, в частности, во многих задачах масштабирования, всякое цифровое изображение рассматривается как отображение

$$I:[a,b]\times[c,d]\to L(R^N,R^M), \tag{1}$$

где через $L(R^N,R^M)$ обозначено пространство числовых матриц размерностью $N \times M$. Значения, которые принимают элементы этих матриц, зависят от типа изображения: это могут быть действительные числа из диапазона [0,1] для монохромных изображений в оттенках серого цвета, или целые значения из промежутка [0,255], если речь идет о кодировании интенсивности пикселей, или их *R*-, *G*-, *B*-характеристики для полноцветных изображений. Величины *N* и *M* связывают с размерами пиксельной сетки

$$\Delta^{WH}=\{(i,j):i=1,\ 2,\ ...,\ N=[W],\ j=1,\ 2,\ ...,\ M=[H]\},$$

на элементах которой заданы значения $I_{ij} = I(i,\ j)$. При этом считается, что матрицы $I=[I_{ij}]_{i=1,N}^{j=1,M}\in L(R^N,R^M)$ являются реализациями на дискретную сетку некоторых непрерывных функций двух переменных $I:[0,W]\times[0,H]\to R$, где $I\in C([0,W]\times[0,H])$. Однако наличие на большинстве изображений таких факторов, как контурность, текстурность дает все основания утверждать, что указанные матрицы являются реализациями на дискретную сетку не гладких, а лишь кусочно-непрерывных функций двух переменных. Таким образом, отображение (1) можно считать кусочно-непрерывным. Вместе с тем такое толкование изображений нельзя считать удовлетворительным, особенно, если речь идет о задачах их пространственной интерполяции, которая состоит в отыскании функции изображения в промежуточных точках между известными его элементами.

Приведем известный контрпример М. Барнсли: если, вооружившись мощным телескопом, посмотреть на ночное звездное небо, то вместо больших звезд увидим их больше. Понятно, что это обстоятельство противоречит свойству кусочной непрерывности отображения (1), поскольку, чем меньше окрестность какой-либо точки $A(x_0, y_0) \in [a,b]\times[c,d]$, тем меньшим должен быть диапазон изменения значений функции $I(x,y)$ в этой окрестности. Для того чтобы разрешить это противоречие, М. Барнсли предложил другое определение изображения – рассматривать изображение как меру, носителем которой является прямоугольная область $[a,b]\times[c,d]$ в R^2. Или иначе, изображение – это распределение, определенное на широком классе тестовых функций [1]. Такое толкование позволяет не только объяснить приведенный выше пример, но и получить четкую физическую интерпретацию цифровых рисунков. Действительно, всякий цифровой рисунок можно рассматривать как результат действия соответствующего распределения (т. е. отображения) на специальным образом подобранную совокупность тестовых функций. В связи с этим рассмотрим некоторые положения теории распределений.

Некоторые сведения из теории распределений. Пусть Ω – открытое множество в n-мерном эвклидовом пространстве R^n, а $D(\Omega)$ – множество функций $\theta(x)$ ($x = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \in \Omega$), каждая из которых имеет непрерывные производные всех порядков и финитна, т. е. обращается в нуль вне компактного носителя – некоторого компактного множества в Ω, своего для каждой из функций $\theta(x)$. Пусть θ^i (i = 1, 2, …) и θ^0 – произвольные функции из $D(\Omega)$ такие, что $\theta^i \to \theta^0$. Это означает, что носители всех θ^i содержатся в одном компактном множестве в Ω и θ^i вместе со всеми своими производными равномерно сходятся к функции θ^0 и ее соответствующим производным. Пусть T – линейный непрерывный функционал на D, т. е. это правило, по которому каждой функции $\theta \in D$ ставится в соответствие действительное число $<T,\theta>$ так, что это соответствие линейно и

$$(\theta^i \to \theta^0 \text{ в } D) \Leftrightarrow (<T,\theta^i> \to <T,\theta^0>).$$

Такой функционал называется *распределением* (или обобщенной функцией) на Ω, а множество таких распределений является линейным пространством, которое обозначается $D'(\Omega)$ [2].

Отметим, что всякая локально интегрируемая функция $f(x)$ задает распределение $\tilde{f} \in D'$ по следующему правилу:

$$<\tilde{f},\theta> = \int_\Omega f(x)\theta(x)dx. \quad (2)$$

Такие распределения называют регулярными. Если же действие распределения на множество функций $D(\Omega)$ нельзя задать в виде (2), то распределение называют сингулярным.

Хотя распределение не имеет своего значения в отдельно взятой точке, в дальнейшем будем считать, что распределение $f \in D'(\Omega)$ равно нулю в области $\Omega_1 \subset \Omega'$, если $<f,\theta> = 0$ при всех $\theta \in D(\Omega_1)$.

Определение 1. Носителем $\operatorname{supp} f$ распределения $f \in D'(\Omega)$ называют наименьшее по включению подмножество Δ множества Ω, вне которого f равно нулю, т. е.

$$\Delta \equiv \operatorname{supp} f \Leftrightarrow <f,\theta> = 0 \ \ \forall \theta \in D(\Omega): \operatorname{supp}\theta \bigcap \Delta = \varnothing.$$

Например, такое сингулярное распределение, как δ-функция Дирака, которое задается по правилу $<\delta,\varphi> = \varphi(0)\ \forall \varphi \in D(\Omega)$, равно нулю в области $x \neq 0$, а его носителем является только одна точка $x = 0$.

Изображение как распределение на R^2.

Определение 2. Всякое изображение I является распределением (т. е. $I \in D'$) таким, что $\operatorname{supp} I = \Delta = [0,W]\times[0,H]$.

Основываясь на такой концепции, можно увидеть существенную разницу между изображением и рисунком, который через систему зрения воспринимается как образ исходного изображения. Действительно, зрительное восприятие какого-либо изображения является результатом привлечения определенной системы «тестовых функцій», которые, воспринимая световой поток от определенной области (а не от совокупности конкретных ее точек), трансформируют его в образ этого изображения в нашем сознании. Понятно, что в зависимости от особенностей психовосприятия и «качества зрения» разных людей эти образы будут отличаться [3]. Достаточно вспомнить восприятие таблицы символов и букв для проверки зрения в медицинских учреждениях. Аналогичная ситуация наблюдается, когда изображение «записывается» через сканер или цифровую камеру. В этом случае его образ строится путем привлечения соответствующей системы тестовых функций, значение распределения на каждой из которых отождествляется со значением определенного пикселя.

Рассмотрим следующую модельную ситуацию. Пусть I – некоторое изображение в шкале серых оттенков. Будем считать, что зрительная система человека способна воспринимать максимальный световой поток (примем его за 1) от идеально белого цвета. Случай, когда такой поток отсутствует, будем считать образом «ідеального» черного цвета и отождествлять со значением 0. Если человек, глядя на определенный, пусть даже очень незначительный фрагмент такого изображения начинает напрягать или ослаблять зрение, то результаты восприятия получаются различными. По сути это означает, что каждый раз изображение оценивается в виде $P(x,y) = \langle I, \omega_\varepsilon(x,y)\rangle$, где $(x,\ y)$ – координаты центра фрагмента изображения, $P:\Delta = [0,W]\times[0,H] \to [0,1]$, а

$$\omega_\varepsilon(x,y):(x-\varepsilon,x+\varepsilon)\times(y-\varepsilon,y+\varepsilon)\to[0,1],\ \varepsilon=\varepsilon_1,\varepsilon_2,...\to 0,$$

$$\omega_\varepsilon(x,y)\in D,\ \ \operatorname{supp}\omega_\varepsilon(x,y)=[x-\varepsilon,x+\varepsilon]\times[y-\varepsilon,y+\varepsilon]$$

является определенной системой «зрительных» тестовых функций. Значения $\varepsilon_1,\varepsilon_2,...$ отождествляются со степенью напряжения зрения. Таким образом, в зависимости от размеров носителя каждой из функций $\omega_\varepsilon(x,y)$, изображение можно увидеть в различных деталях.

В интегральной форме образ P изображения $I \in D'$ можно представить следующим образом:

$$P(x,y) = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_\Delta I(\xi,\eta)\omega_\varepsilon(\xi-x,\eta-y)d\xi\, d\eta \quad \forall (x,y)\in\Delta. \tag{3}$$

Образ P какого-либо изображения $I \in D'$ под действием определенной системы тестовых функций будем называть *рисунком* этого изображения.

Аналогичная ситуация возникает при построении образов цифровых изображений – цифровых рисунков. В этом случае цифровой рисунок представляет собой двумерный массив точек $\{P_{ij}, i=1,...,N; j=1,...,M\}$. С учетом представления (3) по аналогии имеем

$$P_{ij} = \lim_{\varepsilon\to 0}\iint_\Delta I(\xi,\eta)\omega_\varepsilon(\xi-i,\eta-j)d\xi\, d\eta,$$

где тестовые функции могут быть выбраны, например, следующим образом:

$$\omega_\varepsilon(x,y) = \begin{cases} 1, \text{ если } -\varepsilon/2 \le x,y \le \varepsilon/2, \\ 0, \text{ иначе,} \end{cases}$$

или $\omega_\varepsilon(x,y) = e^{-(x^2+y^2)/\varepsilon^2}$.

Цифровой рисунок как дискретный прототип определенного изображения может быть взят за основу восстановления последнего. Для этого достаточно положить

$$\tilde{I} = \sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{M} P_{ij}\delta(x-i, y-j)\,,\ \tilde{I} \in D'\,. \tag{4}$$

Понятно, что в общем случае распределения I и $\tilde{I}$ будут различными ($I \neq \tilde{I}$), но $P(I) \equiv \tilde{P}(\tilde{I})$, где $\tilde{P}(\tilde{I})$ – рисунок восстановленного изображения $\tilde{I} \in D'$ на той самой пиксельной сетке, что и $P(I)$ – рисунок исходного изображения.

Топографическое представление цифровых рисунков. Теперь оценим рисунок с геометрической точки зрения. В соответствии с основным постулатом математической морфологии основная геометрическая информация о каком-либо рисунке содержится в совокупности его множеств λ-уровней [4]. В связи с этим введем следующее определение.

Определение 3. Множеством λ-уровня рисунка $P(I)$ будем называть подмножество множества Δ вида

$$X_\lambda(P) = \{(x, y) \in \Delta : P(x, y) \geq \lambda\}\,,$$

а его границу $\partial X_\lambda(P) = \{(x, y) \in \Delta : P(x, y) = \lambda\}$ – линией уровня, или топографической кривой. Топографическим представлением рисунка $P(I)$ на заданной системе пороговых величин $\{\lambda_k \in [0,1], k = 1,...,K\}$, где $0 \leq \lambda_1 < ... < \lambda_k < \lambda_{k+1} < ... < \lambda_K \leq 1$, будем называть следующую совокупность множеств его λ-уровней:

$$\{X_{\lambda_k}(P)\ \forall k = 1,...,K\}\,.$$

В основе такого определения лежат следующие рассуждения. Восстановление рисунка $P(I)$, а значит и соответствующего ему изображения $\tilde{I} \in D'$ (см. формулу (4)) становится возможным, если при каждом значении $\lambda \in [0,1]$ (речь идет об изображениях в шкале серых оттенков) известно множество соответствующего уровня. Действительно, в этом случае имеем следующее соотношение:

$$P(x, y) = \sup\{\lambda \in [0,1] : (x, y) \in X_\lambda(P)\}\,.$$

Таким образом, основная геометрическая информация о рисунке содержится в совокупности связных компонент из множеств $X_\lambda(P)$. Очевидно, что границами $\partial X_\lambda(P)$ таких множеств являются линии уровней, т. е. контурные кривые, инвариантные к изменению интенсивности изображения. Вопрос о величине периметра множеств уровня для произвольного рисунка в общем случае остается открытым [4]. Более того, можно привести примеры изображений (т. е. распределений из D') и соответствующих им рисунков, для которых множества уровней будут иметь такие периметры, которые при уплотнении пиксельной сетки стремятся к $+\infty$. Ограничимся рассмотрением только тех изображений, множества уровней которых имеют конечный периметр, т. е. принадлежат к классу множеств Каччопполи.

Функции ограниченной вариации и множества Каччопполи. Пусть Ω – ограниченное открытое множество в R^2. Пусть f – произвольная функция из пространства Банаха $L^1(\Omega)$ измеримых (по мере Лебега) функций, т. е. f – измерима и абсолютно интегрируема на множестве Ω.

Определение 4 ([6]). Вариацией функции f на множестве Ω называют значение следующего выражения

$$\int_\Omega |Df| = \sup\left\{\int_\Omega f \operatorname{div}\varphi\, dx:\ \ \varphi = (\varphi_1, \varphi_2) \in C_0^1(\Omega, R^2) \text{ и } |\varphi(x)| \leq 1 \text{ для } x \in \Omega\right\}, \tag{5}$$

где обозначено $\operatorname{div}\varphi = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_i}$, $C_0^1(\Omega, R^2)$ – пространство непрерывных дифференцируемых векторнозначных функций со значениями в R^2, обращающихся в ноль вне множества Ω.

Если $f \in C^1(\Omega)$, то, интегрируя по частям и учитывая, что функции φ равны нулю в окрестности границы $\partial\Omega$ области Ω, получим

$$\int_\Omega f \operatorname{div}\varphi \, dx = -\int_\Omega \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial x_i} \varphi_i dx .$$

Поэтому

$$\int_\Omega |Df| = \int_\Omega |\operatorname{grad} f| dx .$$

По аналогии, если f принадлежит классу Соболева $W^{1,1}(\Omega)$, то

$$\int_\Omega |Df| = \int_\Omega |\operatorname{grad} f| dx ,$$

где теперь $\operatorname{grad} f = (f_1, f_2)$, а функции f_1, f_2 – обобщенные производные функции f. Функции, а точнее – распределения $f_1, f_2 \in L^1(\Omega)$ называют обобщенными или слабыми производными для $f \in L^1(\Omega)$, если

$$\int_\Omega f \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx = -\int_\Omega f_i \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega) .$$

Определение 5. Функцию $f \in L^1(\Omega)$ называют функцией ограниченной вариации или BV-функцией, если

$$\int_\Omega |Df| < \infty .$$

Пространство всех функций из $L^1(\Omega)$ с ограниченной вариацией на Ω обозначают как $BV(\Omega)$; $BV(\Omega)$ является пространством Банаха относительно нормы

$$\|f\|_{BV(\Omega)} = \|f\|_{L^1(\Omega)} + \int_\Omega |Df| .$$

Отметим, что если $f \in BV(\Omega)$ и Df означает градиент f в смысле теории распределений, то Df является векторной мерой Радона, и $\int_\Omega |Df|$ совпадает с полной вариацией Df на Ω [6], при этом $|Df|$ также является мерой. Обозначим

$$\|Df\|(\Omega) = \int_\Omega |Df| \quad \forall f \in BV(\Omega) .$$

Пусть по-прежнему Ω – открытое множество в R^2, а E – произвольное множество Бореля. Периметром множества E в множестве Ω называют величину

$$\operatorname{Per}(E, \Omega) = \int_\Omega |D\chi_E(x)| = \sup\left\{ \int_E \operatorname{div}\varphi \, dx : \varphi \in C_0^1(\Omega, R^2), |\varphi(x)| \le 1 \right\} ,$$

где χ_E – характеристическая функция множества E, определяемая формулой

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } x \in E; \\ 0 \text{ при } x \in R^2 \setminus E. \end{cases}$$

Множество E называют множеством Каччопполи, если оно имеет локально-конечный периметр, т. е. если $\mathrm{Per}(E,\Omega)<\infty$ для всех ограниченных открытых множеств Ω. Как показано в работе [6], множество $E\in R^2$ имеет конечный периметр в Ω тогда и только тогда, когда $u=\chi_E\in BV(\Omega)$ и $|Du|(\Omega)<\infty$.

Допустимые изображения в задачах обработки графической информации. Во многих задачах обработки графической информации рассматривается вопрос о восстановлении цифрового изображения по известным его значениям на пиксельной сетке. Если рассматривать изображение как распределение, то процесс его восстановления целесообразно сводить к построению его порождающей функции в определенном функциональном классе. Результат восстановления изображения в этом случае может зависеть от функциональных свойств того класса распределений, к которому он принадлежит. В связи с этим введем следующие понятия.

Определение 6. Будем называть изображение $I\in D'(\Delta)$ *регулярным*, если найдется интегрируемая функция $\widetilde{I}(x,y):\ \Delta\to[0,1]$ такая, что

1) $<I,\theta>=\int_\Delta \tilde{I}(x,y)\theta(x,y)dxdy$ для всех $\theta\in D(\Delta)$;

2) при каждом значении $\lambda\in[0,1]$ множества уровней

$$X_\lambda(\tilde{I})=\{(x,y)\in\Delta:\tilde{I}(x,y)\geq\lambda \text{ почти всюду}\}$$

принадлежат к классу множеств Каччопполи, т. е.

$$\mathrm{Per}(X_\lambda(\tilde{I}),\Delta)=\int_\Delta\left|D\chi_{X_\lambda(\tilde{I})}(x,y)\right|<+\infty.$$

Регулярные изображения $I\in D'(\Delta)$ будем отождествлять с порождающими их функциями $\widetilde{I}:\ \Delta\to[0,1]$.

Как было отмечено выше, вся геометрическая информация о любом изображении содержится в совокупности его множеств уровней, а точнее, в совокупности связанных компонент таких множеств. Кроме того, известно, что для класса функций с ограниченной вариацией $f\in BV(\Delta)$ их топографические карты можно описать в терминах кривых Жордана, т. е. кривых на R^2, гомеоморфных образу единичной окружности. Более того, почти все множества уровней $X_\lambda(f)$ для функций $f\in BV(\Delta)$ таковы, что их граница $\partial X_\lambda(f)$ (или линия уровня) состоит не более чем из счетного количества кривых Жордана. При этом совокупность точек их самопересечения образует множество, для которого $\mathcal{H}^1$–мера Хаусдорфа равна нулю [7]. В связи с этим можно дать следующее определение.

Определение 7. Статическое изображение $I\in D'(\Delta)$ является *допустимым* в задачах восстановления изображений, если оно регулярное и при этом порождающая функция $\widetilde{I}\in BV(\Delta)$.

Очевидно, что для восстановления такого изображения можно воспользоваться формулой, которую называют топографическим представлением статических изображений:

$$\tilde{I}(x,y)=\sup\{\lambda\in R:(x,y)\in X_\lambda(\tilde{I})\}.$$

Отметим, что для допустимых изображений, т. е. если $\widetilde{I}\in BV(\Delta)$, почти при каждом значении $\lambda\in R$ соответствующее множество уровня $X_\lambda(\tilde{I})$ является множеством Каччопполи, т. е. множеством конечного периметра в R^2.

Рассмотрим трактование некоторых геометрических характеристик кривых в R^2, таких как кривизна линии, единичный вектор нормали, градиент функции для случая, когда изображение рассматривается согласно определению 7.

Напомним, что для непрерывной функции $u(x, y)$ на R^2 градиент определяется как вектор $\nabla u = (u_x, u_y)$, а $\|\nabla u\| = \sqrt{u_x^2 + u_y^2}$ – как его эвклидова норма. Единичный вектор нормали к линии уровня $u(x,y)$=const определяется как $\nabla u / \|\nabla u\|$, а кривизна линии уровня в точке (x, y) – как дивергенция единичного вектора нормали к кривой $u(x, y)$=const, т. е. $\operatorname{curv} u(x,y) = \operatorname{div}\left(\nabla u / \|\nabla u\|\right)$. Эти характеристики используются в задачах восстановления изображения при реализации принципа «непрерывного продолжения» Gestaltist'a (the Good Continuation Principle of Gestaltist), в соответствии с которым визуальное восприятие какого-либо изображения сохраняет гладкую непрерывность всех контуров вместо резких и прерывистых их изменений.

Рассмотрим функцию ограниченной вариации $u(x) \in BV(Q)$, где Q – произвольное открытое ограниченное множество в R^2, $x = (x_1, x_2) \in Q$. Функция u дифференцируема в обобщенном смысле, т. е. ее производные – меры Радона. Обобщенным градиентом функции $u \in BV(Q)$ является векторнозначная мера Радона Du, полная вариация которой, определяемая в соответствии с формулой (5), является конечной, т. е.

$$\|Du\|(Q) = \int_Q |Du| < \infty \ \ \forall u \in BV(Q).$$

Для функции $u \in BV(Q)$ почти все множества ее уровней $[u \geq \lambda] = \{x \in Q : u(x) \geq \lambda\}$ являются множествами конечного периметра.

Пусть $Du = (d\mu_1, d\mu_2)$ – векторнозначный обобщенный градиент функции $u \in BV(Q)$. Тогда для любой вектор-функции $\theta \in C_0^1(Q, R^2)$, которая удовлетворяет условию $|\theta(x)| = |\theta_1(x)| + |\theta_2(x)| \leq 1 \ \forall (x, y) \in \Omega$, имеем

$$\int_Q (uD_1\theta_1 + uD_2\theta_2)\, dx = -\int_Q \theta_1 d\mu_1 - \int_Q \theta_2 d\mu_2 = -\int_Q \theta\, Du .$$

Перейдем в последнем выражении к операции sup на множестве

$$A = \left\{ \theta \in C_0^\infty(Q, R^2) : |\theta(x)|_{R^2} \leq 1 \ \forall x \in Q \right\}$$

и обозначим через $\theta^* : Q \to R^2$ ту измеримую функцию, которая реализует указанный sup. В общем случае θ^* не является непрерывной функцией. Однако в силу условия $|\theta^*(x)|_{R^2} \leq 1$ почти всюду на Q имеем $\theta^* \in L^\infty(Q, R^2)$ – пространству измеримых существенно ограниченных функций со значениями в R^2. Тогда формально можно записать

$$\sup_A \left\{ \int_Q u \operatorname{div} \theta\, dx \right\} = \sup_A \left\{ \int_Q \theta\, Du \right\} = \int_Q \theta^* Du .$$

По определению пространства $BV(Q)$

$$\sup_A \left\{ \int_Q u \operatorname{div} \theta\, dx \right\} = \int_Q |Du|,$$

откуда следует

$$\int_Q |Du| = \int_Q \theta^*(x) Du(x), \quad |\theta^*(x)|_{R^2} \leq 1 \ \text{ почти всюду на } Q. \qquad (6)$$

Таким образом, $|Du|$-почти всюду на Q выполняется соотношение

$$|Du|(x) = \theta^*(x)Du(x). \tag{7}$$

Так как

$$\int_Q |Du| = \|Du\|(Q),$$

где $\|Du\|(Q)$ является $|Du|$-мерой множества Q, то соотношение (6) можно переписать в виде

$$\|Du\|(Q) = \int_Q \theta^* Du. \tag{8}$$

Поскольку $|Du|$-мера абсолютно непрерывна относительно Du-меры, и обе являются мерами Радона, то соотношение (8) в соответствии с теоремой Радона-Никодима означает, что θ^* – производная Радона-Никодима меры $|Du|$ относительно меры Du.

В результате, положив в уравнении (8) $Q = [u \geq \lambda]$ и учитывая (7), можно сделать следующий вывод: почти во всех точках почти всех множеств уровней $[u \geq \lambda]$ функции $u \in BV(Q)$ можно определить нормаль $\theta^*(x)$, которая совпадает $|Du|$-почти всюду с производной Радона-Никодима от меры $|Du|$ по мере Du. Формально это означает следующее:

$$\theta^* Du = |Du|, \quad |\theta^*|_{R^2} \leq 1. \tag{9}$$

Таким образом, кривизну curv $u(x)$ линий уровня $u(x)$ = const для $u \in BV(Q)$ можно трактовать как значение оператора дивергенции на распределении $\theta^*(x)$, удовлетворяющем условиям (9). Само распределение $\theta^*(x)$ можно рассматривать как аналог векторного поля градиентов функции $u(x)$.

Таким образом, допустимое изображение (в смысле определения 7) описывается парой функций ($u(x)$, $\theta^*(x)$), определенной на области Δ, где $u(x) \in BV(\Delta)$ – порождающая функция изображения, а распределение $\theta^*(x)$, удовлетворяющее условиям (9), наследует геометрию поля ее градиентов. При этом в задачах восстановления изображений для соблюдения принципа «непрерывного продолжения» Гесталтиста следует рассматривать следующее условие: кривизна линий уровня $u(x)$ = const, которая определяется как значение оператора дивергенции на распределении $\theta^*(x)$, должна быть минимальной.

Выводы. В задачах обработки графической информации в соответствии с основными постулатами математической морфологии целесообразно рассматривать изображение как линейный непрерывный функционал (распределение), определенный на классе финитных функций с прямоугольным носителем. Это позволяет увидеть разницу между понятиями «цифровое изображение» и «цифровой рисунок»: цифровым рисунком является результат действия порождающей функции соответствующего изображения на определенную систему тестовых функций. Результат восстановления изображения по рисунку будет зависеть от функциональных свойств того класса распределений, которому принадлежит порождающая функция. В связи с этим допустимыми следует считать изображения, порождающая функция которых принадлежит классу функций ограниченной вариации. Это дает возможность определить такие характеристики изображения, как векторное поле градиентов, кривизна линий уровня, которые используются для восстановления изображений.

Список литературы

1. *Barnsley M. F.* Fractal Image Compression / M. F. Barnsley, L. P. Hurd – Wellesley: AK Peters Ltd., 1993. – 253 p.
2. *Гельфанд И. М.* Обобщенные функции и действия над ними / И. М. Гельфанд, Г. Е. Шилов. – М.: Добросвет, 2000. – 412 с.
3. *Прэтт У.* Цифровая обработка зображений / У. Прэтт. Кн.2: пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 480 с.
4. *Serra J.* Image Analysis and Mathematical Morphology / J. Serra – New York: Academic Press, 1982. – 621 p.
5. *Casseles V.* Topographic maps and local contract changes in natural images / V. Casseles, B. Coll, J. M. Morel // Int. J. of Computer Vision. – 1999. – Vol. 33. – P. 5–27.
6. *Джусти Э.* Минимальные поверхности и функции ограниченной вариации / Э. Джусти: пер. с англ. – М.: Мир, 1989. – 240 с.
7. *Ambrosio L.* The connected components of sets of finite perimeter / L. Ambrosio, V. Caselles, S. Masnou, J. M. Morel // European Journal of Mathematics. – 2001. – Vol. 3. – P. 39–92.

М. Є. Сердюк

Математична модель цифрового зображення на основі теорії розподілу

Розглянуто математичну модель цифрового зображення, яка базується на поданні зображення у вигляді лінійного неперервного функціонала на класі фінітних функцій з прямокутним носієм. Визначено допустимі зображення під час їх оброблення з породжувальною функцією, яка належить класу функцій з обмеженою варіацією.

M. E. Serdyuk

Mathematical model of digital images based on theory of distributions

The mathematical model of digital images based on representation of image as linear continuous functional on the class of finite functions with square carrier is considered. Allowable images with generating function which is a function of bounded variation are identified for image processing problems.