

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСІВ ТА СИСТЕМ

УДК 621.372.061.9:517/9.001.57(045)

А. В. Васильев, канд. техн. наук

ОПЕРАЦИОННЫЙ АНАЛОГ ИНТЕГРАЛА РИМАНА-ЛИУВИЛЛЯ ДРОБНОГО ПОРЯДКА В БАЗИСЕ СМЕЩЕННЫХ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике ИПМЭ им. Г. Е. Пухова НАН Украины, e-mail: oleksii.vasyliiev@gmail.com

Предложен операционный аналог оператора дробного интегрирования (интеграла Римана–Лиувилля) в пределах S -преобразования с базисом смещенных полиномов Лежандра. Получены выражения операционных матриц интегрирования различных целых и дробных порядков. Приведен иллюстративный пример применения S -преобразования. Вычисления выполнены в программной среде системы Mathematica®.

Ключевые слова: математическое моделирование, дробное исчисление, интеграл Римана–Лиувилля, S -преобразование, операционные методы, полиномиальная аппроксимация, динамическая система.

Введение. Операционные методы получили широкое распространение при анализе динамических систем. В работах [1; 2] предложены и развиты аппроксимационные методы анализа сигналов и моделирования динамических систем, позволяющие алгебраизировать интегро-дифференциальные математические модели динамических систем. Такие методы обладают свойствами, позволяющими отнести их к операционным, и в работе [2] было предложено называть их S -преобразованиями или неклассическими операционными исчислениями. Как известно [2], основные выражения для S -преобразования формулируются следующим образом. Для сигнала $x(t)$ и системы линейно-независимых базисных функций $\bar{S}(t) = \{s_1(t), s_2(t), \dots, s_m(t)\}^*$, определенных на одном и том же интервале изменения аргумента $t \in [0, T]$, прямым S -преобразованием является выражение

$$\bar{X} = \left(\int_0^T \bar{S}(t) \cdot \bar{S}^*(t) dt \right)^{-1} \int_0^T x(t) \cdot \bar{S}(t) dt, \quad (1)$$

сопоставляющее сигналу $x(t)$ его операционное изображение – вектор коэффициентов $\bar{X}$ обобщенного полинома, аппроксимирующего сигнал по методу наименьших квадратов [3]. В формуле (1) интегрирование выполняется над элементами векторно-матричных операндов, а символом $*$ обозначена операция векторно-матричного транспонирования. Обратным S -преобразованием является выражение аппроксимируемого полинома

$$x_a(t) = \bar{X}^* \cdot \bar{S}(t) = \sum_{i=1}^m X_i s_i(t),$$

который восстанавливает сигнал в виде его аппроксимации $x_a(t)$. Операциям интегрирования сигнала в S -преобразовании соответствует операция умножения вектора изображения подинтегрального выражения на операционную матрицу интегрирования, элементы которой зависят только от системы базисных функций:

$$\bar{Y} = \mathbf{P}_\beta \cdot \bar{X}.$$

В данной работе рассмотрены операционные аналоги оператора дробного интегрирования Римана–Лиувилля [4] для системы базисных функций на основе смещенных полиномов Лежандра:

$$y(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_0^t (t - \tau)^{\beta-1} x(\tau) d\tau.$$

S-преобразование в базисе смещенных полиномов Лежандра. Встроенная функция системы Mathematica® **LegendreP** формирует классическую систему полиномов Лежандра [3; 5], ортогональную на интервале изменения аргумента $x \in [-1, 1]$. Для использования полиномов Лежандра в качестве системы базисных функций для полиномиальной аппроксимации сигналов на интервале изменения аргумента $t \in [0, T]$ необходимо выполнить замену переменных в соответствии с выражением

$$x = -1 + \frac{2t}{T}.$$

Ниже приведен фрагмент программы аппроксимации сигналов в базисе смещенных таким образом полиномов Лежандра.

Задание порядка базисной системы и интервала аппроксимации:

```
m = 7; T = 1;
```

Формирование базисной системы функций и ее визуализация:

```
s[t_, i_] := LegendreP[i - 1, -1 + 2 t/T];
S = Table[s[t, i], {i, m}];
S // TableForm
1
-1 + 2 t
1 - 6 t + 6 t^2
-1 + 12 t - 30 t^2 + 20 t^3
1 - 20 t + 90 t^2 - 140 t^3 + 70 t^4
-1 + 30 t - 210 t^2 + 560 t^3 - 630 t^4 + 252 t^5
1 - 42 t + 420 t^2 - 1680 t^3 + 3150 t^4 - 2772 t^5 + 924 t^6
```

Формирование операционной матрицы спектра Лежандра и ее визуализация:

```
W = Table[∫_0^T s[t, i] * s[t, j] dt, {i, m}, {j, m}];
W // MatrixForm
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{7} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{9} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{13} \end{pmatrix}$$

Определение спектра сигнала и его аппроксимации в базисе смещенных полиномов Лежандра:

$$X := N \left[\text{Inverse}[W].\text{Table} \left[\int_0^T x[t] * s[t, i] dt, \{i, m\} \right] \right]; \quad (2)$$

$$x_a = X.S; \quad (3)$$

Для решения задачи аппроксимации необходимо задать вид сигнала $x[t]$. Выражения (2) и (3) являются соответственно прямым и обратным S-преобразованиями сигнала в базисе смещенных полиномов Лежандра [1; 2]. При изменении значений m и T в конкретных условиях решения аппроксимационной задачи приведенные выражения обеспечат получение необходимых результатов.

Известно [1; 2], что столбцами операционной матрицы интегрирования в любой версии S-преобразования являются вектора коэффициентов аппроксимирующих полиномов для интегралов с переменным верхним пределом от базисных функций. Определим такие интегралы для системы базисных функций на основе смещенных полиномов Лежандра.

Определение вектора интегралов базисной системы функций и его визуализация:

$$\begin{aligned} \mathbf{IS} &:= \text{Table} \left[\int_0^t \mathbf{s}[\tau, \mathbf{i}] d\tau, \{\mathbf{i}, \mathbf{m}\} \right]; \\ \mathbf{IS} & // \text{TableForm} \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} &t \\ &-t + t^2 \\ &t - 3t^2 + 2t^3 \\ &-t + 6t^2 - 10t^3 + 5t^4 \\ &t - 10t^2 + 30t^3 - 35t^4 + 14t^5 \\ &-t + 15t^2 - 70t^3 + 140t^4 - 126t^5 + 42t^6 \\ &t - 21t^2 + 140t^3 - 420t^4 + 630t^5 - 462t^6 + 132t^7 \end{aligned}$$

Формирование и визуализация операционного аналога интегрального оператора порядка 1 в базисе смещенных полиномов Лежандра:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &:= \text{Inverse}[\mathbf{W}].\text{Table} \left[\int_0^t \mathbf{IS}[[\mathbf{j}]] * \mathbf{s}[t, \mathbf{i}] dt, \{\mathbf{i}, \mathbf{m}\}, \{\mathbf{j}, \mathbf{m}\} \right]; \\ \mathbf{P} & // \text{MatrixForm} \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{10} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{14} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{10} & 0 & -\frac{1}{18} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{14} & 0 & -\frac{1}{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{18} & 0 & -\frac{1}{26} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{22} & 0 \end{pmatrix}$$

Вывод выражений для операционных аналогов интегральных операторов нецелых порядков может быть выполнен аналогичным образом. Ниже приведен вывод для интегрального оператора 1/4.

Определение вектора интегралов Римана–Лиувилля порядка β базисной системы функций:

$$\begin{aligned} \mathbf{IS}\beta[\beta] &:= \\ &\text{Table} \left[\text{Integrate} \left[\frac{1}{\Gamma(\beta)} * (t - \tau)^{\beta-1} * \mathbf{s}[\tau, \mathbf{i}], \{\tau, 0, t\}, \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \text{Assumptions} \rightarrow t > 0 \right], \{\mathbf{i}, \mathbf{m}\} \right]; \end{aligned} \quad (6)$$

Задание числового значения дробного порядка 1/4 интегрального оператора:

$$\mathbf{IS1} = \mathbf{N}[\mathbf{IS}\beta[1/4]]; \quad (7)$$

Формирование операционной матрицы интегрирования порядка 1/4:

$$\mathbf{P1} := \text{Inverse}[\mathbf{W}].\text{Table} \left[\int_0^t \mathbf{IS1}[[\mathbf{j}]] * \mathbf{s}[t, \mathbf{i}] dt, \{\mathbf{i}, \mathbf{m}\}, \{\mathbf{j}, \mathbf{m}\} \right]; \quad (8)$$

Подстановка других числовых значений порядка интегрального оператора в формулы (6) – (8) позволяет получить выражения для операционных матриц интегрирования как

целых, так и дробных порядков. Таким образом, формулы (4), (5) являются частным случаем выражений (6) – (8).

Пример. Проиллюстрируем применение операционных аналогов интеграла Римана-Лиувилля к нахождению интегралов с порядками $\beta := \{1/4, 1/2, 3/4, 1, 5/4\}$ сигнала $x(t) = \sin(2\pi\sqrt{t})$ на интервале изменения аргумента $t \in [0, 2]$. Используем в качестве системы базисных функций смещенные полиномы Лежандра порядка $m = 7$. В приведенном ниже фрагменте программы предполагается, что системы базисных функций и необходимые выражения для аппроксимации сигналов и операционных матриц интегрирования сформированы.

Фрагмент программы

Задание сигнала и нахождение его изображения в области S -преобразования:

```
x[t_] := Sin[2 π * √t];
X := N[Inverse[W].Table[∫0T x[t] * s[t, i] dt, {i, m}]];
X
{0.206168, 0.680524, 0.635714, -1.31437, 0.096366, 0.405745, -0.308149}
```

Формирование аппроксимации сигнала:

```
xa = X.S;
```

Нахождение аналитических выражений интегралов искомых порядков (необходимы в качестве эталонов для сравнения аппроксимаций интегралов):

```
y[t_, β_] := Integrate[ $\frac{(t-\tau)^{\beta-1}}{\Gamma(\beta)}$  * x[τ], {τ, 0, t}, Assumptions → t > 0]
```

$y1[t_] := y[t, 1/4]$	$y1[t]$	$\pi^{3/4} t^{3/8} \text{BesselJ}\left[\frac{3}{4}, 2\pi\sqrt{t}\right]$
$y2[t_] := y[t, 1/2]$	$y2[t]$	$\pi^{3/2} t \text{Hypergeometric0F1Regularized}[2, -\pi^2 t]$
$y3[t_] := y[t, 3/4]$	$y3[t]$	$\pi^{1/4} t^{5/8} \text{BesselJ}\left[\frac{5}{4}, 2\pi\sqrt{t}\right]$
$y4[t_] := y[t, 1]$	$y4[t]$	$\frac{-2\pi\sqrt{t} \cos[2\pi\sqrt{t}] + \sin[2\pi\sqrt{t}]}{2\pi^2}$
$y5[t_] := y[t, 5/4]$	$y5[t]$	$\frac{t^{7/8} \text{BesselJ}\left[\frac{7}{4}, 2\pi\sqrt{t}\right]}{\pi^{1/4}}$

Формирование операционных матриц интегрирования соответствующих порядков:

$IS1 = N[IS\beta[1/4]];$
$P1 := \text{Inverse}[W].\text{Table}\left[\int_0^T IS1[[j]] * s[t, i] dt, \{i, m\}, \{j, m\}\right];$
$IS2 = N[IS\beta[1/2]];$
$P2 := \text{Inverse}[W].\text{Table}\left[\int_0^T IS2[[j]] * s[t, i] dt, \{i, m\}, \{j, m\}\right];$
$IS3 = N[IS\beta[3/4]];$
$P3 := \text{Inverse}[W].\text{Table}\left[\int_0^T IS3[[j]] * s[t, i] dt, \{i, m\}, \{j, m\}\right];$
$IS4 = N[IS\beta[1]];$
$P4 := \text{Inverse}[W].\text{Table}\left[\int_0^T IS4[[j]] * s[t, i] dt, \{i, m\}, \{j, m\}\right];$
$IS5 = N[IS\beta[5/4]];$
$P5 := \text{Inverse}[W].\text{Table}\left[\int_0^T IS5[[j]] * s[t, i] dt, \{i, m\}, \{j, m\}\right];$

Нахождение изображений интегралов сигнала и их аппроксимаций:

$Y1 = P1.X; y1a = Y1.S; Y2 = P2.X; y2a = Y2.S; Y3 = P3.X; y3a = Y3.S;$
 $Y4 = P4.X; y4a = Y4.S; Y5 = P5.X; y5a = Y5.S;$

Визуализация сигнала и аппроксимаций интегралов сигнала различных порядков (рис. 1):

`p2 = Plot[{x[t], y1a, y2a, y3a, y4a, y5a}, {t, 0, T}]`

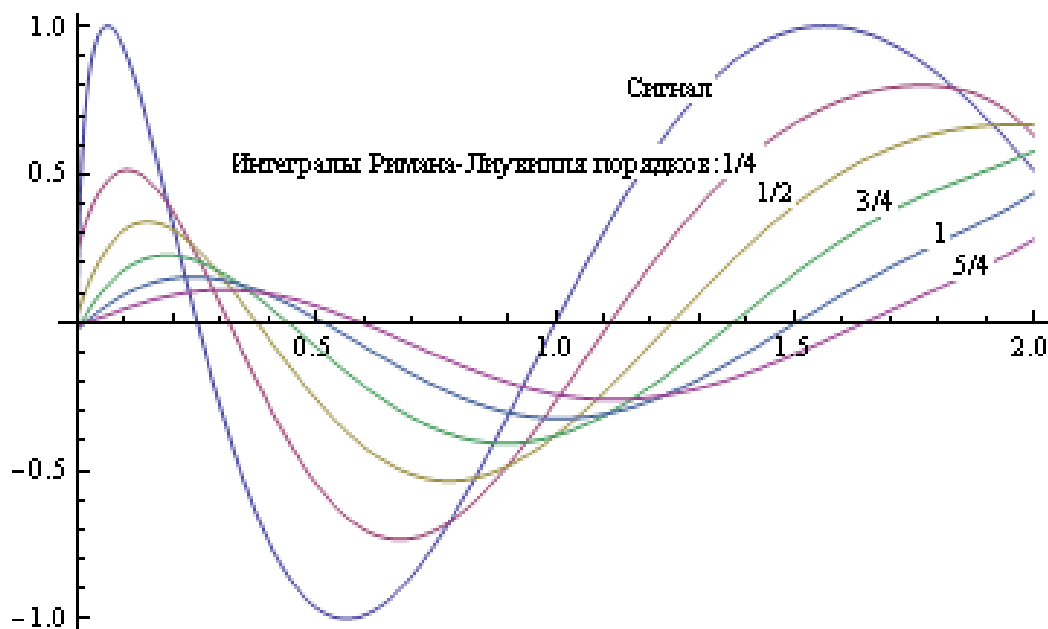


Рис. 1. Сигнал и аппроксимации его интегралов различных порядков

Визуализация функций ошибок аппроксимации интегралов сигнала (рис. 2):

`p4 = Plot[{y1[t] - y1a, y2[t] - y2a, y3[t] - y3a, y4[t] - y4a, y5[t] - y5a}, {t, 0, T}, PlotRange -> All]`

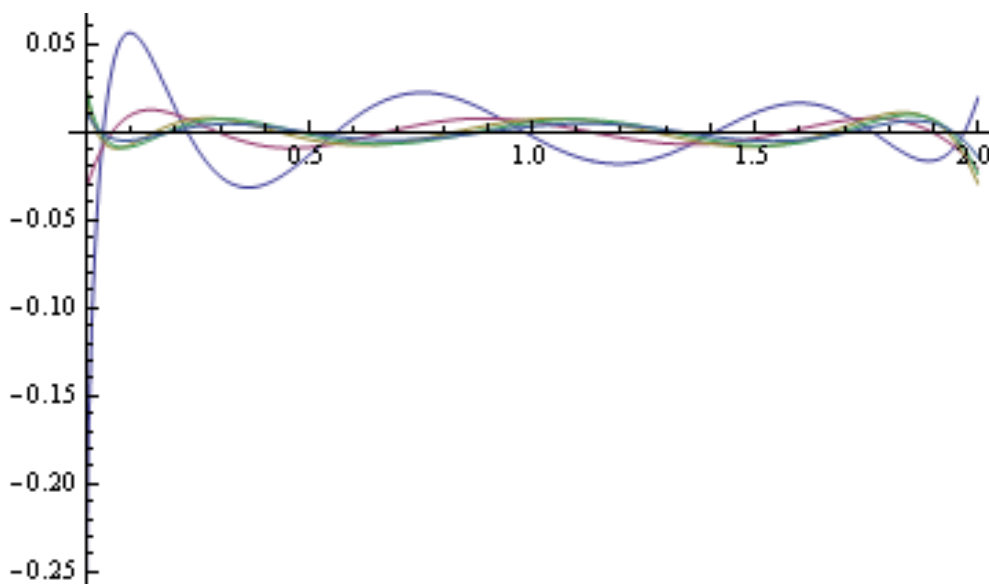


Рис. 2. Функции ошибок аппроксимации интеграла Римана–Лиувилля сигнала различных порядков

Выводы. Приведенные выражения и фрагменты программ могут быть полезны при моделировании нестационарных процессов дробной динамики систем [4], в которой математическими моделями процессов являются интегро-дифференциальные уравнения

нецелых порядков. В частности, нетрудно видеть, что изменение значений порядков интегральных операторов, диапазона изменения аргумента, вида сигнала не меняет вида программных выражений. Использование в качестве системы базисных функций ортогональных полиномов Лежандра позволяет избежать трудностей вычислительного порядка, вызываемых плохой обусловленностью матриц в случае применения неортогональных базисных систем.

Список литературы

1. Васильев В. В. Полиномиальные методы аппроксимации как операционные исчисления и их реализация в программной среде системы Mathematica® / В. В. Васильев, Л. А. Симак // Электронное моделирование. – 1996. – Т. 18, № 4. – С. 34 – 42.
2. Васильев В. В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В. В. Васильев, Л. А. Симак. – К.: НАН України, 2008. – 256 с.
3. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций / В. Л. Гончаров. – М.: ГИИТЛ, 1954. – 327 с.
4. Учайкин В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин – Ульяновск: Изд-во «Артишок», 2008. – 512 с.
5. Wolfram Stephen. The Mathematica book. – Wolfram Media / Stephen Wolfram // Cambridge University Press, 1996. – 1403 p.

О. В. Васильев

Операційний аналог інтеграла Рімана–Ліувілля дробового порядку в базисі зміщених поліномів Лежандра

Запропоновано операційний аналог оператора дробового інтегрування (інтеграла Рімана–Ліувілля) в межах S -перетворення з базисом зміщених поліномів Лежандра. Отримано вирази операційних матриць інтегрування різних цілих і дробових порядків. Наведено ілюстративний приклад застосування S -перетворення. Обчислення виконано в програмному середовищі системи Mathematica®.

Oleksii Vasyliiev

An operational analogue of the Riemann–Liouville fractional integral in the basis of shifted Legendre polynomials

We propose an operational analog of fractional integration operator (the Riemann–Liouville) in the S -transform with the basis of the shifted Legendre polynomials. The expressions of operational matrices of integration of various integer and fractional orders were obtained. An illustrative example of S -transform application is showed. Computations are realized in Mathematica® software system.