

УДК 621.372.061.9:517/9.001.57(045)

А. В. Васильев, канд. техн. наук

ДИСКРЕТИЗАЦИЯ И ОЦЕНИВАНИЕ ДРОБНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ В ЛОКАЛЬНЫХ БАЗИСАХ ПОЛИНОМОВ ЛЕЖАНДРА

Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике ИПМЭ
им. Г. Е. Пухова НАН Украины, e-mail: oleksii.vasyliiev@gmail.com

Предложен метод дискретизации по аргументу и оценивания средних значений дробных производных по Риману–Лиувиллю и Капуто для непрерывных сигналов с использованием аппроксимации в базисе смещенных полиномов Лежандра и S -преобразования. Метод иллюстрируется вычислительным экспериментом в программной среде системы Mathematica®.

Ключевые слова: математическое моделирование, дробное исчисление, дробная производная по Капуто, дробная производная по Риману–Лиувиллю, S -преобразование, операционные методы, автоматическое управление, цифровая обработка сигналов, полиномиальная аппроксимация, динамическая система.

Введение. Математическое и компьютерное моделирование динамических систем предусматривает использование эффективных методов цифровой обработки сигналов. К таким методам относятся, в частности, низкочастотная фильтрация, осреднение, дискретизация по уровню и аргументу. Подобные методы сопровождаются также применением операционных методов и методов аналитической аппроксимации при анализе и моделировании систем [1; 2]. В статье [3] рассмотрен метод оценивания средних значений сигнала и его первой и второй производных с одновременной дискретизацией по аргументу. В связи с широким использованием в математическом моделировании динамических систем с нецелыми порядками интегро-дифференциальных операторов возникает задача оценивания средних значений дробных производных различных порядков. В данной работе предлагается метод решения указанной задачи на основе использования полиномиальной аппроксимации сигналов и операционного метода S -преобразований [1; 2]. Принят следующий порядок изложения существа метода. Уточнены используемые в статье понятия осреднения и дискретизации сигналов. Затем определены известные формулы, определяющие дробные производные по Риману–Лиувиллю и Капуто. Рассмотрен порядок применения операционного метода S -преобразований к решению поставленной задачи. В заключение рассмотрен иллюстративный пример оценивания и дискретизации дифференциальных характеристик сигнала для случая производной по Капуто.

Постановка задачи. Осреднение и дискретизация сигналов. Анализируемый сигнал $y(t)$ задан в диапазоне $0 \leq t < T$ изменения аргумента t . Диапазон изменения аргумента дискретизируется путем введения сети m конечных элементов равной длины $h = T/m$: $(i-1)h \leq t < ih$; $i := 1, \dots, m$. Необходимо оценить средние значения сигнала и его производных порядка α : $n-1 < \alpha < n$, $n := 1, 2$, $\alpha \in R$ при значениях аргумента $\tilde{t}_i = (i-1/2)h$, $i := 1, \dots, m$. Под средними значениями сигнала $z(t)$ подразумеваются величины:
$$\tilde{z}_i = \frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} z(t) dt.$$
 Одновременно обеспечивается дискретизация путем замены непрерывного сигнала $z(t)$ массивом его значений $\tilde{z}_i$.

Определение дробных производных по Риману–Лиувиллю и Капуто. В математическом анализе нецелых порядков наиболее часто используются два определения производных нецелого (дробного) порядка: Римана–Лиувилля и Капуто [2; 5]. Производная дробного порядка α по Риману–Лиувиллю функции $y(t)$ определяется выражением

$${}^{RL}D^{\alpha}(y(t)) = \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} y(\tau) d\tau \right) = \frac{d^n}{dt^n} (I^{(n-\alpha)}(y(t))). \quad (1)$$

В формуле (1) и далее предполагается, что дробный порядок дифференциального оператора α изменяется в пределах $n-1 < \alpha < n$, $n := 1, 2$. Таким образом, производная Римана–Лиувилля порядка α вводится как производная целого порядка n от интеграла Римана–Лиувилля порядка $n - \alpha$. Иначе определяется дробная производная по Капуто:

$${}^CD^{\alpha}(y(t)) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \int_0^t (t-\tau)^{n-\alpha-1} \frac{d^n y(\tau)}{d\tau^n} d\tau = I^{(n-\alpha)} \left(\frac{d^n y(t)}{dt^n} \right). \quad (2)$$

Как следует из выражения (2), в отличие от (1), сначала сигнал дифференцируется с целым порядком n , а затем интегрируется по Риману–Лиувиллю с порядком $n - \alpha$. Как известно [5], производные Римана – Лиувилля и Капуто совпадают лишь при нулевых начальных условиях для дифференцируемой функции и ее производных до $n - 1$ -го порядка.

При исследовании и моделировании реальных динамических систем предпочтительнее использовать производные дробного порядка по Капуто, так как при этом необходимы начальные значения функции и целочисленных производных, определяющих поведение динамической системы, тогда как в случае производных Римана–Лиувилля возникают трудности с нахождением начальных условий для дробных производных.

S-преобразование в локальном базисе полиномов Лежандра. S-преобразование является неклассическим операционным методом аппроксимационного типа, основанном на представлении сигналов полиномами по различным системам базисных функций [2]. В данной работе используется разновидность S-преобразования, для которого система базисных функций образована из ортогональных полиномов Лежандра с линейно-преобразованным аргументом [3; 4]. Основные выражения, используемые здесь, заимствованы из работы [3] и приводятся без подробного вывода.

Система локальных базисных функций образована из трех подсистем на основе полиномов Лежандра нулевого, первого и второго порядков:

$$p_0(t, i, h) = \sigma(t - (i-1)h) - \sigma(t - ih); \quad (3)$$

$$p_1(t, i, h) = \left(1 - 2i + \frac{2}{h}t \right) p_0(t, i, h); \quad (4)$$

$$p_2(t, i, h) = \left(1 - 6i + 6i^2 + 6(1-2i)\frac{t}{h} + 6\left(\frac{t}{h}\right)^2 \right) p_0(t, i, h). \quad (5)$$

В выражениях (3) – (5) приняты следующие обозначения: $\sigma(x)$ – функция единичного скачка, равная нулю при отрицательном аргументе и единице при положительном; i – целочисленный индекс ($i := 1, \dots, m$); h – шаг дискретизации по аргументу ($mh = T$).

Подсистемы базисных функций соответствующих порядков определяются выражениями:

– подсистема нулевого порядка: $\bar{V} = \{p_0(t, i, h)\}_{i=1}^m$,

– подсистема первого порядка: $\bar{W} = \{p_1(t, i, h)\}_{i=1}^m$,

– подсистема второго порядка: $\bar{U} = \{p_2(t, i, h)\}_{i=1}^m$.

Вектора аппроксимирующих локальных спектров Лежандра находят по формулам:

$$\bar{F}_v = \frac{1}{h} \int_0^{mh} f(t) \bar{V} dt = \left(\frac{1}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} f(t) dt \right)_{i=1}^m, \quad (6)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_w = \frac{3}{h} \int_0^{mh} f(t) \bar{\mathbf{W}} dt = \left(\frac{3}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} f(t) \left(2 \frac{t}{h} + 1 - 2i \right) dt \right)_{i=1}^m, \quad (7)$$

$$\bar{\mathbf{F}}_u = \frac{5}{h} \int_0^{mh} f(t) \bar{\mathbf{U}} dt = \left(\frac{5}{h} \int_{(i-1)h}^{ih} f(t) \left(6 \left(\frac{t}{h} \right)^2 + 6(1-2i) \frac{t}{h} + 6i^2 - 6i + 1 \right) dt \right)_{i=1}^m. \quad (8)$$

Векторы в выражениях (6) – (8) определяют аппроксимации сигнала нулевого, первого и второго порядков и используются в качестве основы для оценивания средних значений сигнала и его производных:

– кусочно-ступенчатая аппроксимация

$$f_{a0}(t) = \bar{\mathbf{F}}_v \cdot \bar{\mathbf{V}}; \quad (9)$$

– кусочно-ступенчатая аппроксимация

$$f_{a1}(t) = f_{a0}(t) + \bar{\mathbf{F}}_w \cdot \bar{\mathbf{W}}; \quad (10)$$

– кусочно-параболическая аппроксимация

$$f_{a2}(t) = f_{a1}(t) + \bar{\mathbf{F}}_u \cdot \bar{\mathbf{U}}. \quad (11)$$

В зависимости от требований к точности аппроксимации могут использоваться одна из формул (9) – (11).

Средние значения сигнала определяются компонентами вектора $\bar{\mathbf{F}}_v$. Средние значения первой и второй производных находятся из следующих формул [3]:

$$\bar{\mathbf{F}}_{df1} = \frac{2}{h} \bar{\mathbf{F}}_w,$$

$$\bar{\mathbf{F}}_{df2} = \frac{12}{h^2} \bar{\mathbf{F}}_u.$$

Оценивание и дискретизация дробных производных непрерывных сигналов. Для оценивания дробных производных по Риману–Лиувиллю и Капуто необходимо использовать выражения для операционных матриц интегрирования соответствующего S -преобразования [1].

Дробные производные по Капуто. Средние значения дробной производной по Капуто, порядок которой изменяется от нуля до единицы, определяются выражением

$$\bar{\mathbf{F}}_{df\alpha 1} = \frac{2}{h} \mathbf{P}^{(1-\alpha)} \cdot \bar{\mathbf{F}}_w. \quad (12)$$

В выражении (12) символом $\mathbf{P}^{(1-\alpha)}$ обозначена операционная матрица дробного интегрирования порядка $1-\alpha$, соответствующая локальной системе базисных функций Лежандра нулевого порядка.

Средние значения дробной производной по Капуто, порядок которой изменяется от единицы до двух, определяются выражением

$$\bar{\mathbf{F}}_{df\alpha 2} = \frac{12}{h^2} \mathbf{P}^{(2-\alpha)} \cdot \bar{\mathbf{F}}_u, \quad (13)$$

где $\mathbf{P}^{(2-\alpha)}$ – операционная матрица дробного интегрирования порядка $2-\alpha$.

Дробные производные по Риману–Лиувиллю. В соответствии с выражением (1), определяющим производную дробного порядка по Риману – Лиувиллю, оценивание средних значений производных сигнала следует проводить в следующем порядке:

– определить векторы аппроксимирующих спектров сигнала по формулам (6) – (8);

– определить векторы аппроксимирующих спектров дробного интеграла сигнала, используя выражения интеграла в области S -преобразования (операционную матрицу интегрирования для базисной системы порядка $3m$);

– оценить средние значения производных первого и второго порядков для полученных средних значений интеграла дробного порядка по формулам, аналогичным (12), (13).

Порядок оценивания и дискретизации средних значений сигнала и его производных различных целых и дробных порядков рассмотрим на иллюстративном примере для производных по Капуто сигнала $f(t) = 3t^4 - 2t^3$. Вычислительный эксперимент выполнен в программной среде системы *Mathematica*® [5].

Иллюстративный пример. Оценить средние значения сигнала: $f(t) = 3t^4 - 2t^3$ и его производных порядков: $\alpha := 1, 1.3, 2$ при изменении аргумента в пределах $0 \leq t < 1$, применив шаг дискретизации $h = 0.01$.

Программа

Задание сигнала:

```
f[x_] := 3 t^4 - 2 t^3;
```

Задание параметров вычислительного эксперимента:

```
h:= 0.01; m:= 100; α = 1.3;
```

Формирование базиса локальных полиномов Лежандра:

```
p0[x_] := 1; p1[x_] := x; p2[x_] := (3 x^2 - 1) / 2;

q0[y_, h_, i_] := p0[2/h * y + 1 - 2 i] * If[(i - 1) * h ≤ y < i * h, 1, 0];
q1[y_, h_, i_] := p1[2/h * y + 1 - 2 i] * If[(i - 1) * h ≤ y < i * h, 1, 0];
q2[y_, h_, i_] := p2[2/h * y + 1 - 2 i] * If[(i - 1) * h ≤ y < i * h, 1, 0];

V = Table[q0[t, 0.01, i], {i, m}];
W = Table[q1[t, 0.01, i], {i, m}];
U = Table[q2[t, 0.01, i], {i, m}];
```

Определение векторов аппроксимирующих спектров Лежандра нулевого, первого и второго порядков:

```
Fv = Table[1/h * ∫_{(i-1)*h}^{i*h} f[t] dt, {i, m}];
Fw = Table[3/h * ∫_{(i-1)*h}^{i*h} f[t] * (2 t/h + 1 - 2 i) dt, {i, m}];
Fu = Table[5/h * ∫_{(i-1)*h}^{i*h} f[t] * (6 (t/h)^2 - (6/h) * (2 i - 1) * t +
6 i^2 - 6 i + 1) dt, {i, m}];
```

Аппроксимация сигнала нулевого, первого и второго порядков:

```
fa0 = Fv.V; fa1 = fa0 + Fw.W; fa2 = fa1 + Fu.U;
```

Визуализация сигнала и его аппроксимации нулевого порядка и производных дробного порядка (рис. 1 – 3):

```
Plot[{f[t], fa0}, {t, 0, 1}, PlotPoints -> 200]
```

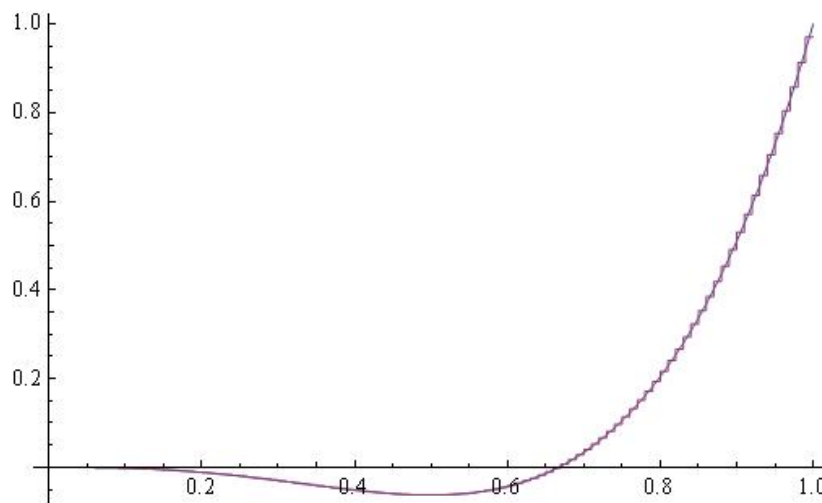


Рис. 1. Сигнал и его аппроксимация нулевого порядка

Аналитическое определение производных сигнала первого и второго порядков:

```
f1 = D[f[t], t]; f2 = D[f[t], {t, 2}];
```

Определение векторов аппроксимирующих спектров первой и второй производных сигнала нулевого порядка:

$$F1 = \frac{2}{h} * Fw; \quad F2 = \frac{12}{h^2} * Fu;$$

Аналитическое определение дробной производной сигнала $3t^4 - 2t^3$ порядка $\alpha = 1,3$:

$$Dc = 3 \frac{\Gamma[5]}{\Gamma[3.7]} * t^{2.7} - 2 \frac{\Gamma[4]}{\Gamma[2.7]} * t^{1.7};$$

Определение операционной матрицы интегрирования порядка $2 - \alpha = 0,7$ в локальном базисе Лежандра нулевого порядка:

$$p[k_, h_, \beta_] := \frac{h^\beta}{\Gamma[\beta + 2]} * \text{If}[k < 0, 0, \text{If}[k == 0, 1, ((k + 1)^{\beta+1} + (k - 1)^{\beta+1} - 2 k^{\beta+1})]]];$$

```
P07 = Table[p[i - j, h, 0.7], {i, m}, {j, m}];
```

Нахождение вектора аппроксимирующего спектра производной по Капуто порядка $\alpha = 1,3$ и аппроксимации производной:

```
Fdc = P07.F2; fdca = Fdc.V;
```

Сравнение полученной аппроксимации дробной производной по Капуто с ее точным значением:

```
Plot[{Dc, fdca}, {t, 0, 1}, PlotPoints -> 150]
```

Визуализация аппроксимирующего спектра производной по Капуто порядка 1,3 ($m = 100$):

```
ListPlot[Fdc]
```

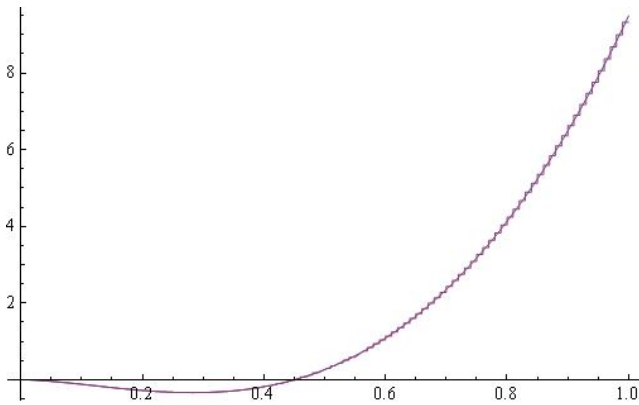


Рис. 2. Сравнение аппроксимации дробной производной по Капуто порядка 1,3 с ее точным значением

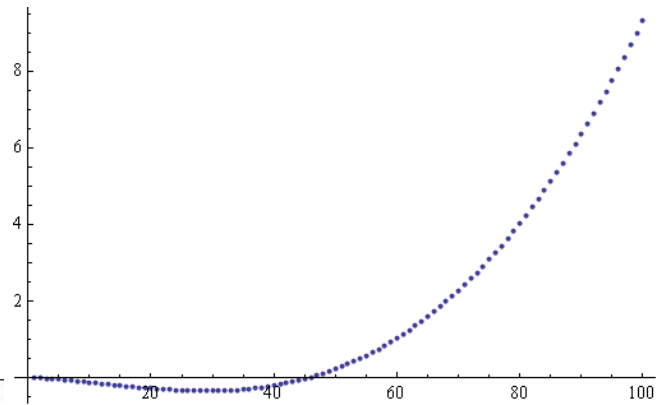


Рис. 3. Элементы вектора аппроксимирующего спектра Лежандра производной сигнала по Капуто порядка 1,3

Заключение. Рассмотренный в работе метод оценивания и одновременной дискретизации по аргументу непрерывных сигналов и его производных различных целого и дробных порядков основан на систематическом использовании операционного S -преобразования с базисной системой из преобразованных ортогональных полиномов Лежандра и может быть полезен при цифровой обработке сигналов при моделировании задач дробной динамики систем.

Список литературы

1. Васильев В. В. Аналіз та математичне моделювання динамічних систем на базі некласичних операційних числень / В. В. Васильєв, Л. О. Сімак, О. С. Воронова та ін. – К.: НАН України, 2006. – 184 с.
2. Васильев В. В. Дробное исчисление и аппроксимационные методы в моделировании динамических систем / В. В. Васильев, Л. А. Симак. – К.: НАН України, 2008. – 256 с.
3. Васильев А. В. Оценивание параметров и дискретизация непрерывных сигналов на основе полиномиальной аппроксимации в локальных базисах / А. В. Васильев / Електроніка та системи управління. – 2011. – № 1 (27). – С. 14 – 19.
4. Гончаров В. Л. Теория интерполирования и приближения функций / В. Л. Гончаров. – М.: ГИИТЛ, 1954. – 327 с.
5. Учайкин В. В. Метод дробных производных / В. В. Учайкин. – Ульяновск, Изд-во «Артишок», 2008. – 512 с.
6. Wolfram Stephen. The Mathematica book. – Wolfram Media / Cambridge University Press, 1996. – 1403 p.

О. В. Васильєв

Дискретизація та оцінювання дробових похідних безперервних сигналів у локальних базисах поліномів Лежандра

Запропоновано метод дискретизації і оцінювання середніх значень дробових похідних за Ріманом–Ліувіллем і Капуто для неперервних сигналів з використанням апроксимації в базисі зміщених поліномів Лежандра і S -перетворення. Метод ілюструється обчислювальним експериментом в програмному середовищі системи Mathematica ®.

O. V. Vasyliiev

The sampling and estimation of fractional derivatives for continuous signals in local bases of Legendre polynomials

The method of the sampling and the estimation of mean values of fractional derivatives of Riemann-Liouville and Caputo type, for continuous signals with the use of approximation in the basis of the shifted Legendre polynomials, and S -transform is proposed. The method is illustrated by computational experiments in the software environment of Mathematica ®.