УДК 621.372.061.9:517/9.001.57(045)

А. В. Васильев, канд. техн. наук

ОЦЕНИВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ И ДИСКРЕТИЗАЦИЯ НЕПРЕРЫВНЫХ СИГНАЛОВ НА ОСНОВЕ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ АППРОКСИМАЦИИ В ЛОКАЛЬНЫХ БАЗИСАХ

Отделение гибридных моделирующих и управляющих систем в энергетике ИПМЭ им. Г. Е. Пухова НАН Украины, e-mail: oleksii.vasyliev@gmail.com

Предложена методика оценивания средних значений непрерывного сигнала и его первой и второй производных при дискретизации по аргументу с шагом h. Методика основана на использовании метода полиномиальной аппроксимации с базисной системой локального типа на основе смещенных полиномов Лежандра. Рассмотрен иллюстративный пример применения методики. Вычислительный эксперимент выполнен в программной среде системы Mathematica®.

Ключевые слова: математическое моделирование, автоматическое управление, цифровая обработка сигналов, полиномиальная аппроксимация, динамическая система.

Введение. При обработке экспериментальной информации, математическом и компьютерном моделировании динамических систем часто возникает задача оценивания значений непрерывных сигналов, их производных первого и второго порядков. Компьютерная реализация математических моделей дифференциальных игр также предполагает оценивание текущих значений положения объектов, скоростей и ускорений. Прямое дифференцирование сигналов, полученных техническими средствами наблюдения, не представляется возможным в связи с высокой чувствительностью операций дифференцирования к ошибкам измерения и помехам, сопровождающим сигналы в реальных условиях. В связи с этим необходимо обеспечить оценивание параметров сигнала с использованием осреднения и низкочастотной фильтрации для выделения информативных параметров сигналов на фоне шумов и ошибок измерения. В данной работе для решения указанных задач предлагается использовать метод полиномиальной аппроксимации сигналов на основе локальных базисных систем [2].

Постановка задачи. Аппроксимация сигналов в базисе смещенных полиномов Лежандра. Для сигнала $f(t)$, заданного на интервале изменения аргумента $0 \le t < T$, полиномиальная аппроксимация представляется выражением [2]:

$$f_a(t) = \sum_{i=1}^{m} F_i s_i(t) = \vec{\mathbf{F}} \cdot \vec{\mathbf{S}}(t),$$

где $\vec{\mathbf{F}} = [F_1, F_2, \ldots, F_m]^*$ – вектор аппроксимирующего полиномиального спектра сигнала; $\vec{\mathbf{S}}(t) = [s_1(t), s_2(t), \ldots, s_m(t)]^*$ – вектор системы базисных функций, формирующих обобщенный полином и определенных на общем с сигналом интервале изменения аргумента. При использовании локальных базисных систем диапазон изменения аргумента разбивается на m конечных элементов с шагом h ($T = mh$), и на каждом i-м элементе вводится локальная базисная функция (система функций), тождественно равная нулю за пределами элемента. Рассмотрим использование полиномов Лежандра в качестве таких локальных базисных систем.

Известно [1; 2], что полиномы Лежандра порядка n могут быть сформированы как решения дифференциального уравнения: $(1-x^2)\dfrac{d^2w}{dx^2} - 2x\dfrac{dw}{dx} + n(n+1)w = 0$. Для них также существует рекуррентная формула: $p_{n+1}(x) = \dfrac{2n+1}{n+1} x p_n(x) - \dfrac{1}{n+1} p_{n-1}(x)$, $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = x$.

Полиномы Лежандра образуют ортогональную систему на интервале изменения аргумента $-1 \le x \le 1$ с весовой функцией $\gamma(x) = 1$. Для формирования локальных смещенных полиномов Лежандра, ортогональных на i-м элементе, необходимо преобразовать аргумент в соответствии с выражением $x = 1 - 2i + \frac{2}{h}t$. Выполним такое преобразование для первых трех полиномов Лежандра: $p_0(x) = 1;\ p_1(x) = x;\ p_2(x) = \frac{3x^2 - 1}{2}$. Вид первых трех полиномов показан на рис. 1.

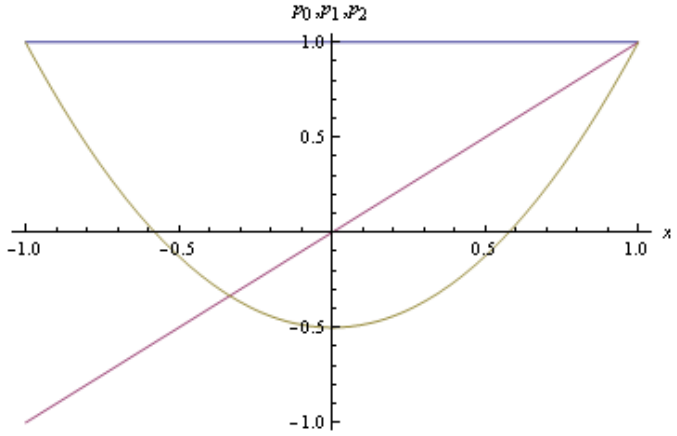


Рис. 1. Первые три полинома Лежандра

Преобразование приводит к следующим выражениям:

$$p_0(t,i,h) = \sigma(t-(i-1)h) - \sigma(t-ih)\,; \tag{1}$$

$$p_1(t,i,h) = \left(1 - 2i + \frac{2}{h}t\right) p_0(t,i,h)\,; \tag{2}$$

$$p_2(t,i,h) = \left(1 - 6i + 6i^2 + 6(1-2i)\frac{t}{h} + 6\left(\frac{t}{h}\right)^2\right) p_0(t,i,h)\,. \tag{3}$$

В формулах (1) – (3) символом $\sigma(*)$ обозначена функция единичного скачка вида:

$$\sigma(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } & x \ge 0; \\ 0, \text{ если } & x<0. \end{cases}$$

Таким образом, выражение (1) обеспечивает локальный характер полиномов. На рис. 2 приведен вид полиномов (1) – (3) соответственно для элементов 5, 7 и 9 при h = 0,1.

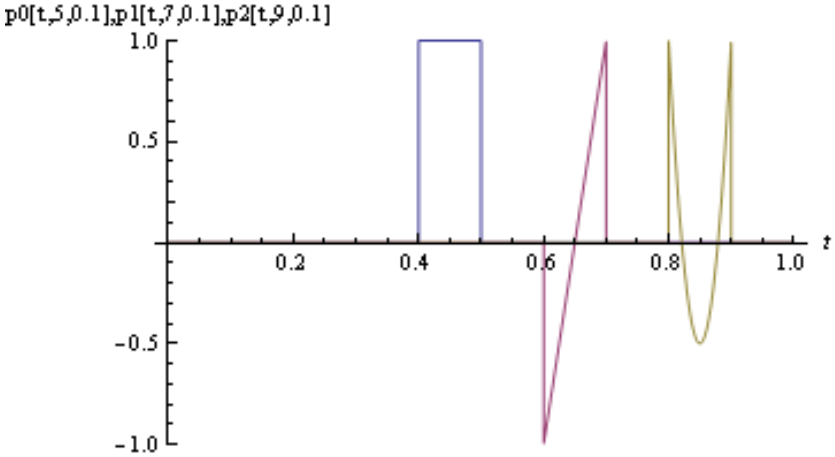


Рис. 2. Вид локальных смещенных полиномов Лежандра

На основе указанных полиномов Лагранжа сформируем следующие подсистемы базисных функций:

– подсистему нулевого порядка: $\vec{\mathbf{V}} = \{p_0(t,i,h)\}_{i=1}^{m}$; (4)

– подсистему первого порядка: $\vec{\mathbf{W}} = \{p_1(t,i,h)\}_{i=1}^{m}$; (5)

– подсистему второго порядка: $\vec{\mathbf{U}} = \{p_2(t,i,h)\}_{i=1}^{m}$. (6)

Эти подсистемы позволяют выполнить аппроксимацию сигнала кусочно-постоянными, кусочно-линейными или кусочно-параболическими функциями. Соответствующие базисные системы будут иметь порядок соответственно m, $2m$ или $3m$. Так как введенные подсистемы базисных функций и системы в целом являются ортогональными [1; 2], вектора аппроксимирующих полиномиальных спектров могут быть определены без решения систем алгебраических уравнений:

$$\vec{\mathbf{F}}_v = \frac{1}{h}\int_0^{mh} f(t)\vec{\mathbf{V}}dt = \left(\frac{1}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} f(t)dt\right)_{i=1}^{m}; \quad (7)$$

$$\vec{\mathbf{F}}_w = \frac{3}{h}\int_0^{mh} f(t)\vec{\mathbf{W}}dt = \left(\frac{3}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} f(t)\left(2\frac{t}{h}+1-2i\right)dt\right)_{i=1}^{m}; \quad (8)$$

$$\vec{\mathbf{F}}_u = \frac{5}{h}\int_0^{mh} f(t)\vec{\mathbf{U}}dt = \left(\frac{5}{h}\int_{(i-1)h}^{ih} f(t)\left(6\left(\frac{t}{h}\right)^2+6(1-2i)\frac{t}{h}+6i^2-6i+1\right)dt\right)_{i=1}^{m}. \quad (9)$$

Соответствующие аппроксимации сигнала нулевого, первого и второго уровней определяются следующими выражениями:

$$f_{a0}(t) = \vec{\mathbf{F}}_v \cdot \vec{\mathbf{V}}; \quad (10)$$

$$f_{a1}(t) = f_{a0}(t) + \vec{\mathbf{F}}_w \cdot \vec{\mathbf{W}}; \quad (11)$$

$$f_{a2}(t) = f_{a1}(t) + \vec{\mathbf{F}}_u \cdot \vec{\mathbf{U}}. \quad (12)$$

В формулах (10) – (12) использованы операциии скалярного произведения векторов аппроксимирующих полиномиальных спектров (7) – (9) и векторов подсистем базисных функций (4) – (6).

Оценивание параметров сигнала и дискретизация по аргументу. Анализ выражений для векторов аппроксимирующих полиномиальных спектров (7) – (9) позволяет сделать следующие замечания. Элементы вектора $\vec{\mathbf{F}}_v$ являются средними значениями сигнала на конечных интервалах изменения аргумента $(i-1)h \le t < ih,\ i := 1,...,m$. Это позволяет их использовать в качестве результата дискретизации по аргументу. Элементы векторов $\vec{\mathbf{F}}_w$, $\vec{\mathbf{F}}_u$ необходимо преобразовать в соответствии со следующими выражениями для того, чтобы они являлись средними значениями первой и второй производных сигнала:

$$\vec{\mathbf{F}}_{df1} = \frac{2}{h}\vec{\mathbf{F}}_w,$$

$$\vec{\mathbf{F}}_{df2} = \frac{12}{h^2}\vec{\mathbf{F}}_u.$$

Ниже приведены программа и результаты оценивания параметров сигнала на иллюстративном примере.

Иллюстративный пример. Задан сигнал $f(t) = e^{at}$. Необходимо оценить его параметры (средние значения сигнала, первой и второй производных), приняв следующие числовые значения: $a = -2;\ h = 0{,}1;\ m = 10$.

Программа в системе Mathematica [3]

Задание числовых значений констант:

```
a := -2; h := 0.1; m := 10;
```

Задание формы сигнала:

```
f = e^(a*t);
```

Формирование первых трех полиномов Лежандра:

```
p0[x_] := 1; p1[x_] := x; p2[x_] := (3 x^2 - 1)/2;
```

Формирование локальных смещенных полиномов Лежандра:

```
q0[y_, h_, i_] := p0[2/h * y + 1 - 2 i] * If[(i - 1) * h ≤ y < i * h, 1, 0];
q1[y_, h_, i_] := p1[2/h * y + 1 - 2 i] * If[(i - 1) * h ≤ y < i * h, 1, 0];
q2[y_, h_, i_] := p2[2/h * y + 1 - 2 i] * If[(i - 1) * h ≤ y < i * h, 1, 0];
```

Формирование подсистем базисных функций:

```
V = Table[q0[t, 0.1, i], {i, m}];
W = Table[q1[t, 0.1, i], {i, m}];
U = Table[q2[t, 0.1, i], {i, m}];
```

Определение векторов аппроксиирующих спектров нулевого, первого и второго порядков:

```
Fv = Table[1/h * Integral_((i-1)*h)^(i*h) f dt, {i, m}]
Fw = Table[3/h * Integral_((i-1)*h)^(i*h) f * (2 t / h + 1 - 2 i) dt, {i, m}]
Fu = Table[5/h * Integral_((i-1)*h)^(i*h) f * (6 (t / h)^2 - (6 / h) * (2 i - 1) * t + 6 i^2 - 6 i + 1) dt, {i, m}]
```

Определение аппроксимаций сигнала нулевого, первого и второго порядков:

```
fa0 = Fv.V;  fa1 = fa0 + Fw.W;  fa2 = fa1 + Fu.U;
```

Оценивание первой и второй производных сигнала:

```
F1 = 2/h * Fw;  F2 = 12/h^2 * Fu;
```

Определение аппроксимаций первой и второй производных сигнала нулевого порядка:

```
f1a = F1.V;  f2a = F2.V;
```

Формирование производных сигнала (эталон для сравнения):

```
f1 = D[f, t]; f2 = D[f, {t, 2}];
```

Визуализация сигнала, его производных и результатов дискретизации и оценивания (рис. 3 – 5):

```
Plot[{f, fa0}, {t, 0, 1}]
```

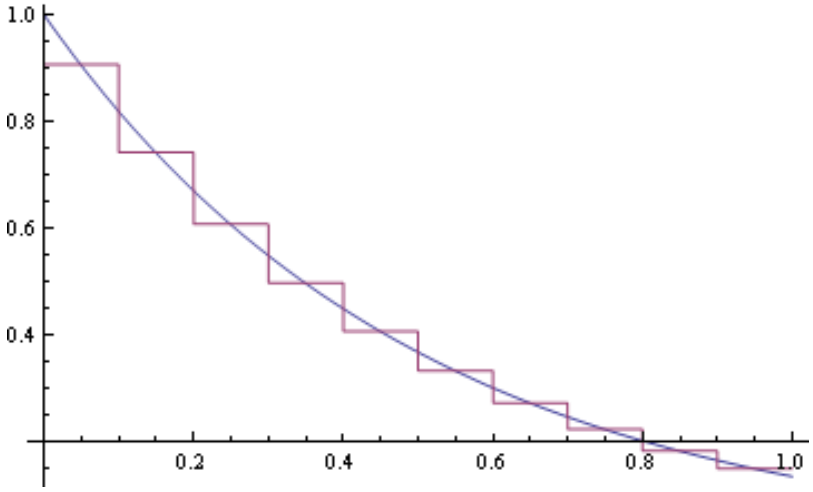


Рис. 3. Сигнал и его средние значения для h = 0,1

```
Plot[{f1, f1a}, {t, 0, m*h}]
```

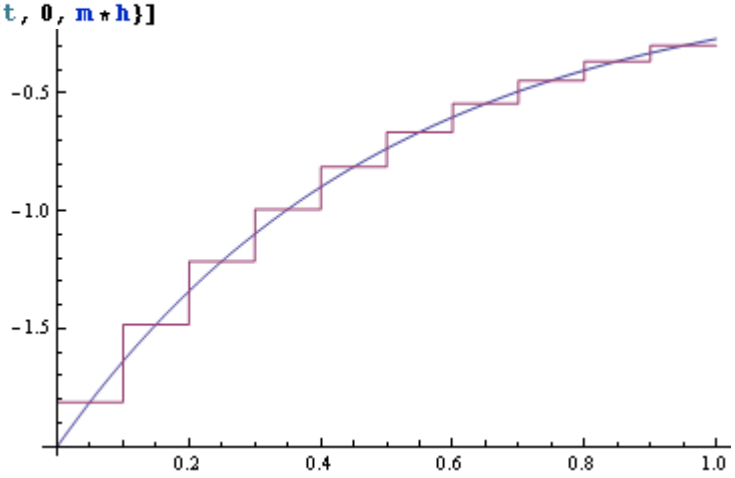


Рис. 4. Первая производная сигнала и ее средние значения для h = 0,1

```
Plot[{f1, f1a}, {t, 0, m*h}]
Plot[{f2, f2a}, {t, 0, m*h}]
```

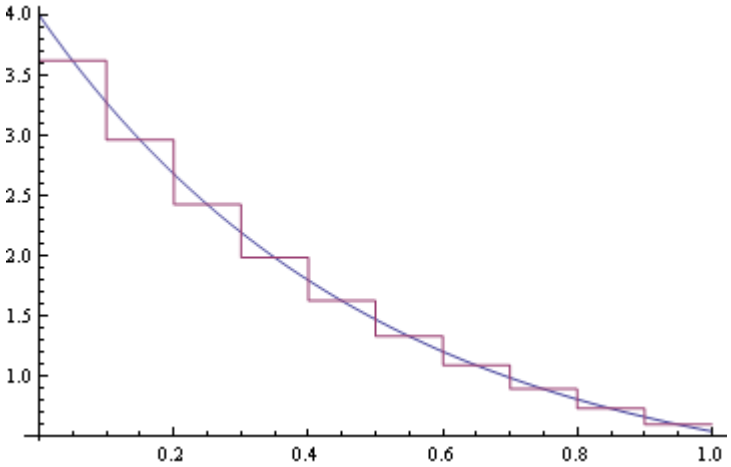


Рис. 5. Вторая производная сигнала и ее средние значения для h = 0,1

```
Plot[{f1, f1a}, {t, 0, m*h}]
```

В таблице приведены результаты оценивания и дискретизации параметров сигнала на основе аппроксимации локальными смещенными полиномами Лежандра.

Результаты оценивания и дискретизации параметров сигнала

i	Fv	F_1	F_2
1	0,906	-1,811	3,622
2	0,742	-1,483	2,965
3	0,608	-1,214	2,428
4	0,497	-0,994	1,988
5	0,407	-0,814	1,628
6	0,333	-0,666	1,322
7	0,273	-0,546	1,090
8	0,224	-0,447	0,893
9	0,183	-0,366	0,731
10	0,150	-0,299	0,599

Выводы. Предложенный метод оценивания, основанный на использовании локальных аппроксимирующих спектров на основе смещенных полиномов Лежандра, позволяет одновременно получать численные средние значения сигнала и его первой и второй производных и выполнить дискретизацию по аргументу. Метод может быть полезным при математическом и компьютерном моделировании динамических систем, систем автоматического управления, в частности, при моделировании дифференциальных игр.

Список литературы

1. *Гончаров В. Л.* Теория интерполирования и приближения функций. – М.: ГНТТЛ, 1954. – 327 с.
2. *Васильев В. В.* Аппроксимация в спектральных методах моделирования динамических систем. Сравнительный анализ / В. В. Васильев, Л. А. Симак, О. С. Воронова. – К.: ИПМЭ им. Г. Е. Пухова, 1998. – № 04/98. – 72 с. (Препринт НАН Украины. Отделение гибридных моделрующих и управляющих систем в энергетике ИПМЭ).
3. *Wolfram Stephen* The Mathematica book / Wolfram Media / Cambridge University Press, 1996. – 1403 p.

О. В. Васильєв

Оцінювання параметрів і дискретизація безперервних сигналів на основі поліноміальної апроксимації в локальних базисах

Запропоновано методику оцінювання середніх значень неперервного сигналу і його першої та другої похідних при дискретизації за аргументом з кроком *h*. Методика грунтується на використанні методу поліноміальної апроксимації з базисною системою локального типу на основі зміщених поліномів Лежандра. Розглянуто ілюстративний приклад застосування методики. Обчислювальний експеримент виконано у програмному середовищі системи Mathematica ®.

O. V. Vasyliev

Parameter Estimation and Sampling of Continuous Signals based on Polynomial Approximation in the local bases

The method of estimating of mean values of the continuous signal and its first and second derivatives with respect to the argument with a sampling step h is proposed. The technique is based on the method of polynomial approximation via the basis system of local type on the basis of the shifted Legendre polynomials. An illustrative example of the application procedure is considered. Computing experiment is made in the programming environment of Mathematica ®.